筑波大学数理物理系

粒子加速器
ビームの運動の基礎

大見　和史
高エネルギー加速器研究機構（KEK）
加速研究施設

簡単な特殊相対論の式の使い方

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$E=mc^2$はv<<cで成り立つ。 $\beta \ll 1 \quad \gamma \approx 1$

- ローレンツ因子

$$E = mc^2\gamma \qquad v = \beta c \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

- ビームのエネルギーは運動エネルギーで表す

$$T = E - mc^2 \approx \frac{mv^2}{2}$$

相対論的電気力学

- ローレンツ力(同じ式)

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$$|\dot{\boldsymbol{p}}| = m\gamma v^2 \left| \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} \right| = evB$$

$$\left| \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} \right| = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{s}$$

接線ベクトル

$$\boxed{p = m\gamma v = eB\rho}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{eB}{m\gamma}}$$

- 周波数はエネルギーによる。

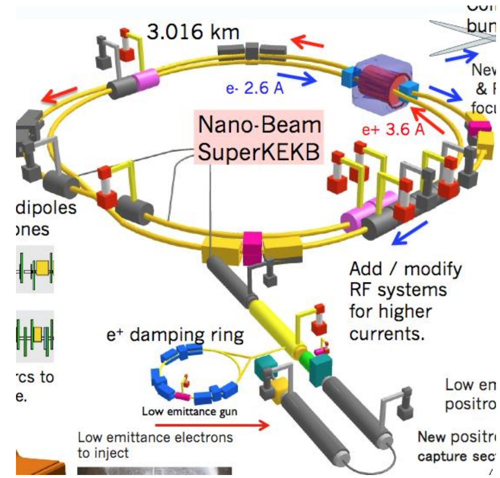
ビーム物理の目的

- ビーム粒子を期待した軌道上に閉じこめておき、必要なら希望する方向に取り出す。
- そのためにビーム粒子は加速器の中で安定した運動をしなければならない。安定性の条件、不安定性の除去。

KEKの加速器

	Energy	長さ	current	#bunch	bunch shape (x,y,z)	粒子数 (bunch)
	GeV	m	A		mm	10^{10}
KEK-Linac	8_{max}	480		(50Hz)		1-10
KEKB	4&7	3016	1	1600	0.1x0.001 x5	6
KEK-PF	2.5	187	0.5	250	1x0.1x10	0.5
ATF	1.5	139	0.1	1-	0.2x0.02 x5	1
J-PARC(RCS)	0.2->3	348	10	2	20x20x 70000	4000
J-PARC(MR)	3->30	1567	10	8	10x10x 20000	4000

運動エネルギー



基準（設計）軌道（粒子）を設定

- 基準（設計）粒子、基準（設計）軌道を基準（設計）のエネルギーで運動
- 磁石（B,Q,S…)の設置、基準（設計）粒子が基準（設計）軌道を通るようにする。

粒子が基準軌道の近傍で安定か
（講義の主題）
線形理論

加速器でよく使われる座標変数

- 基準軌道（粒子）からのずれを座標変数にとる。
- 運動の変数を時間ではなく、基準軌道の軌道方向の位置にとる。

$(x, p_x, y, p_y, z, p_z; s)$

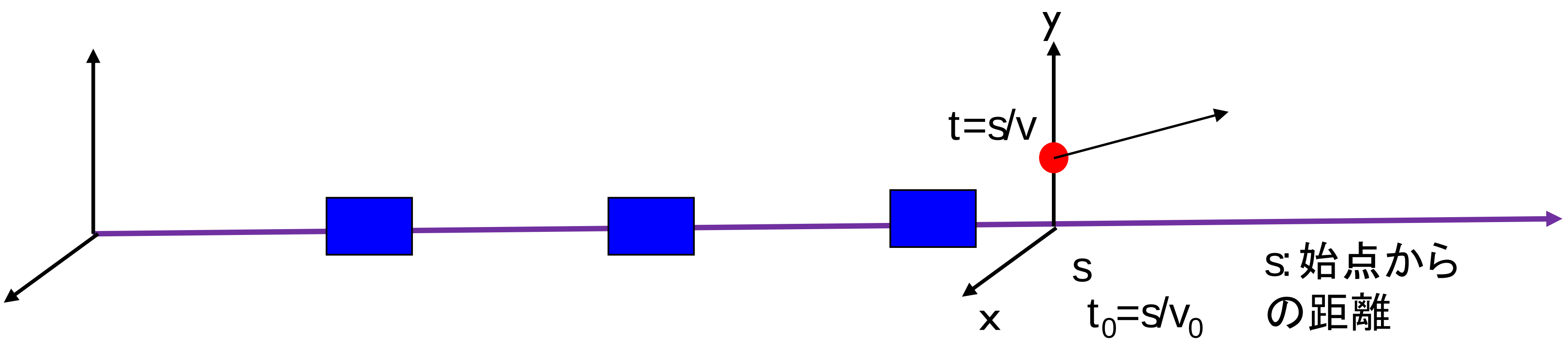
x,y: 基準軌道からのx,y

$(p_x, p_y)=(P_x,P_y)/p_0$: 力学的運動量/基準粒子の運動量

$z=s-v_0t$ ：sに到着する時刻の基準粒子に対する進み x v_0 , 軌道長の縮み。

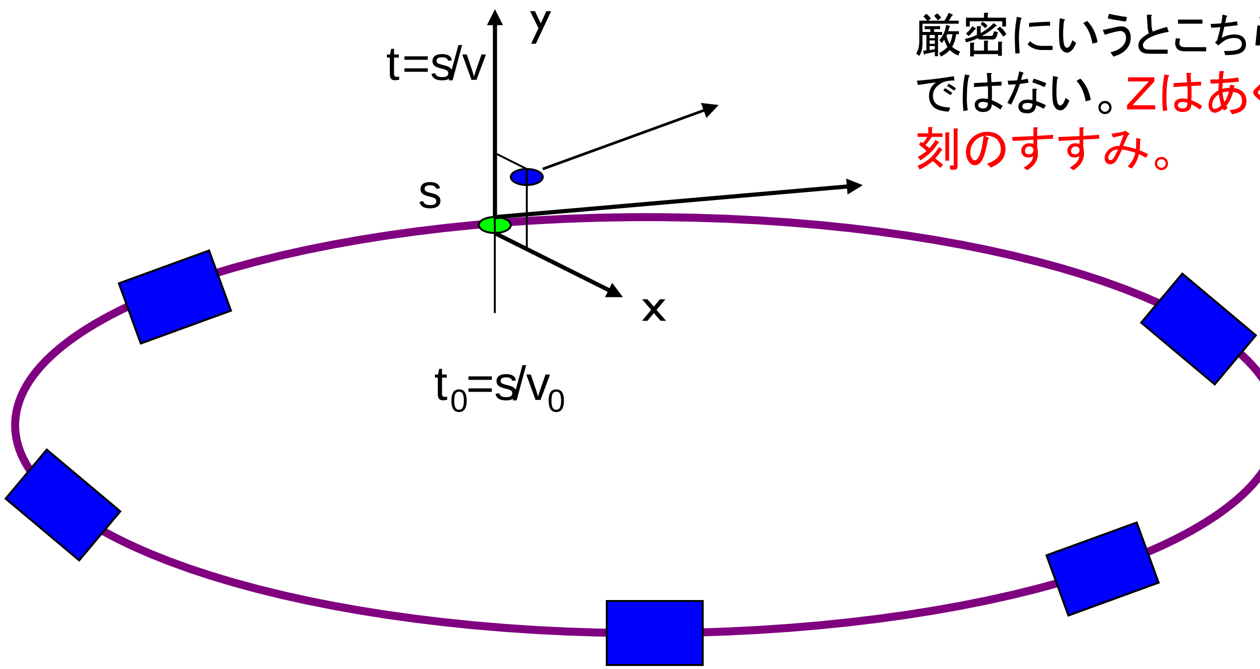
$p_z=(p-p_0)/p_0=\Delta p/p_0$: 運動量のずれの割合

基準軌道と座標系-線形加速器



- 加速空洞と収束磁石、偏向磁石からなる。

基準軌道と座標系-円形加速器



厳密にいうとこちらは座標軸ではない。Zはあくまでも時刻のすすみ。

- 磁石を並べて基準軌道を設定する。設計粒子が磁石の中心を通るようにする。

直線軌道での到着時刻

- エネルギー差による到着時刻の遅れ

$$t = \frac{L}{v} \qquad \frac{\Delta t}{t} = -\frac{\Delta v}{v}$$

$$v = \frac{pc^2}{E} \qquad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta p E - p \Delta E}{Ep} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p}$$

$$\frac{\Delta t}{t} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p}$$

- 1GeV位の電子ではΔtは多くの場合無視できる。
- Δp/p=0.01, γ=2000, L=100m, cΔt=0.25μm<<σ_z=1mm.
- 無視できない場合の典型。自由電子レーザー、周波数が速い(波長が短い)、cΔt>λ.

それではzは意味あるのか

- エネルギーの異なる粒子は異なる軌道上を運動する(色収差)。軌道長もエネルギーによる。
- エネルギーのずれに対する設計軌道長からのずれを1次まで考慮

$$\frac{d\ell}{ds} = \alpha(s) p_z$$

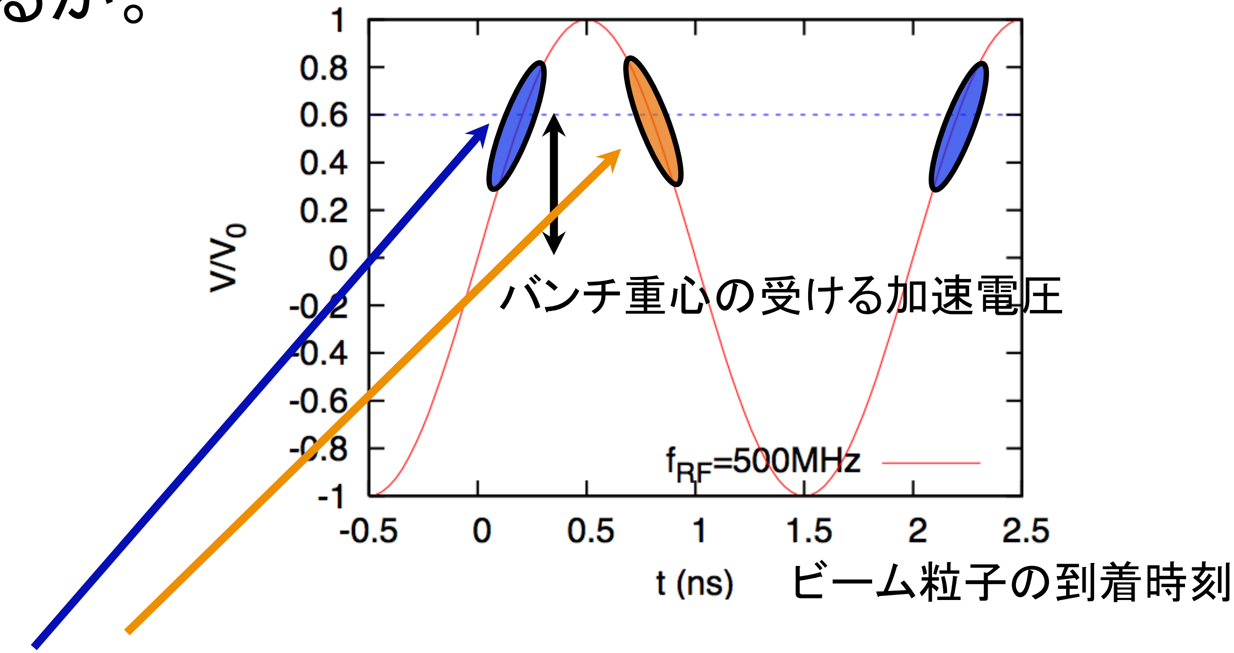
α:運動量コンパクション係数

- 軌道が長ければ到着が遅くなる、zが負になる。
- zは速度による部分と、エネルギーによる軌道(長)の違いからの部分がある。

$$\frac{dz}{ds} = -\left(\alpha(s) - \frac{1}{\gamma^2}\right) p_z \equiv -\eta p_z$$

シンクロトロン加速

- Radio Freq.電場(正弦波)をつかった加速。どの位相に合わせるか。



- 青橙の場合速い粒子は中心より加速が小さい大きい。
- 加速電圧は中心に対する時間差に比例して小さく大きくなる
- どちらの位相に乗せると安定かは設計による。いずれにしても重心の周りに単振動させるようにする。

円形加速器での加速

- 正弦波の線形部分をつかった加速

$$\frac{dp_z}{ds} = \frac{eV'}{E} z\delta(s - s_{RF}) \approx \frac{eV'}{EL} z$$

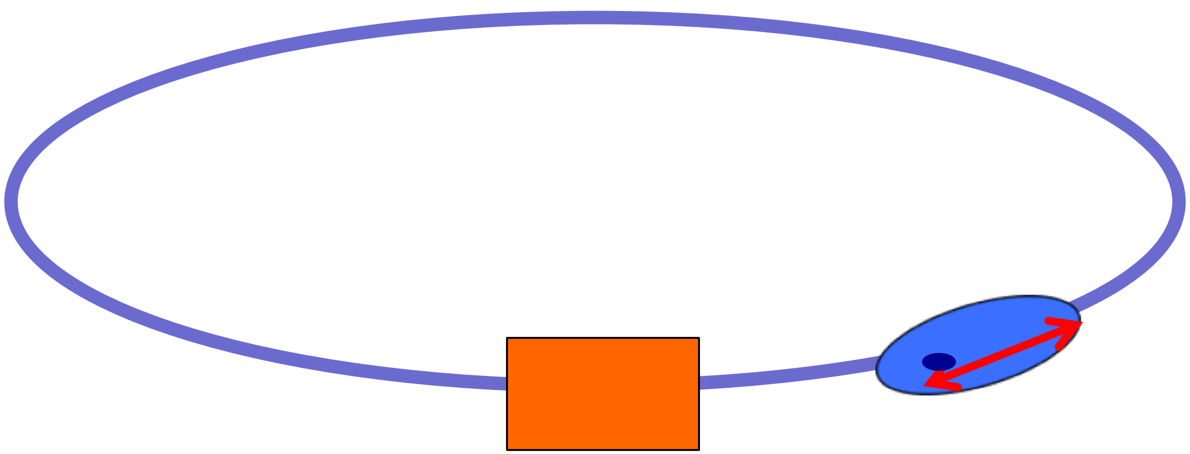
$$\frac{dz}{ds} = -\eta p_z$$

RFの場所だけでp_zは変化するが、
周回で一様に変化すると近似

- ηの符号により、V’ の符号(位相)を選び、調和振動的に安定にz, p_zを運動させる。

シンクロトロン振動

- ビーム重心は高周波加速装置の周波数に同期した(ある位相の)タイミングで加速装置を通過する。
- ビームはその位相に応じて加速装置からエネルギーを受け取る。
- ビームの個々の粒子はその位相に対して、進んだり遅れたりして振動する。この振動をシンクロトロン振動という。



シンクロトロン周波数、チューン

- コンパクションと加速

$$\frac{dz}{ds} = -\eta p_z \qquad \frac{dp_z}{ds} = \frac{eV'}{EL} z$$

まとめると

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{\eta e V'}{EL} z$$

解

$$z = A \exp\left(i \sqrt{\frac{\eta e V' L}{E}} \frac{s}{L} \right)$$

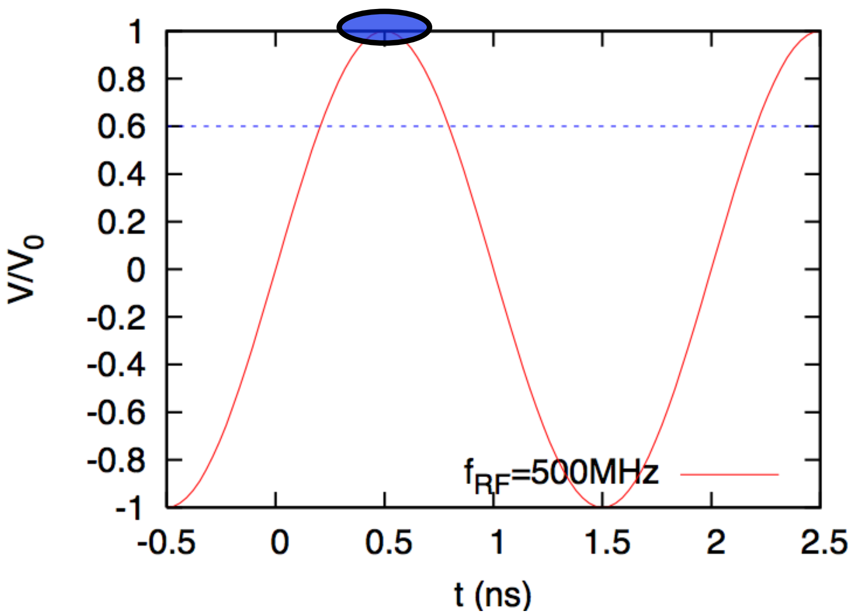
$$\omega_s = \frac{c}{L} \sqrt{\frac{\eta e V' L}{E}}$$

$$\nu_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta e V' L}{E}}$$

周回あたり振動する回数を
チューンと呼ぶ
シンクロトロンチューン

線形加速器での加速

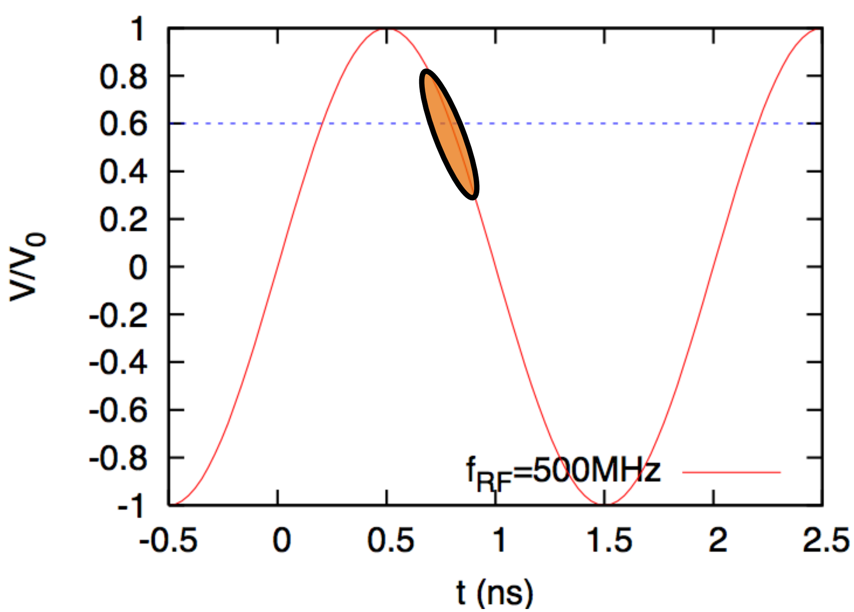
- 効率よく加速したい。~π/2に合わせる。

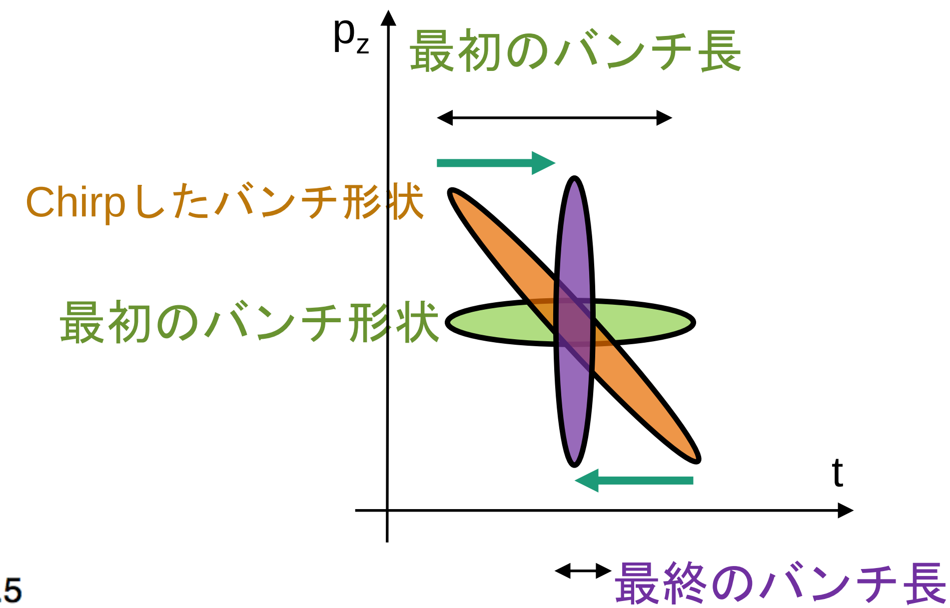


- Sinの曲率でバンチの前部と後部は少しエネルギーが小さくなる。

バンチ長を制御する技術

- 正弦波の線形な位相にビームを合わせる。
- バンチの前がエネルギーが低く、後ろが高くする。Energy chirpという。（鳥のさえずりのように先後で周波数が異なる。
- コンパクション、速度によりエネルギー差でzを変え、バンチ長を縮める。





ベクトルポテンシャルとマクスウェル方程式

- Maxwell方程式

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$rot\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

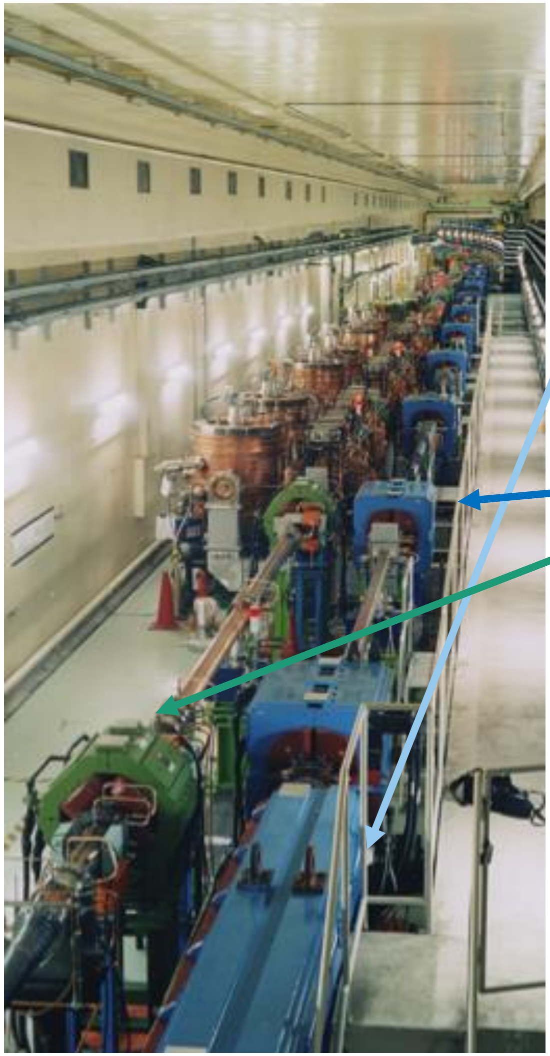
$$\boldsymbol{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

Lorentz ゲージ $div\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

横方向(x-y)の運動



電磁石を使って粒子の軌道を曲げる。

- 偏向磁石　粒子をx面内に曲げる。
- 収束磁石　粒子を収束させる。
- 6極磁石　色収差補正。

加速器静磁場を表すベクトルポテンシャル

- 偏向磁石、収束磁石 B_z=0、A_zのみで表せる。

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \qquad A_x = A_y = 0$$

$$\Delta A_z = 0 \qquad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

- ラプラス方程式、多重極展開

$$A_z = -Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n-1}}{n!}(x+iy)^n = -Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n-1}}{n!}\zeta^n$$

- 加速器の磁石は大抵$B_y(x,-y)=B_y(x,y)$, a_nは実数

$$A_z = -b_0 x - \frac{b_1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{b_2}{6}(x^3 - 3xy^2) + \cdots$$

$B_x(-x,y)=-B_x(x,y)$　　Skew成分はエラーとして存在

磁場と磁石

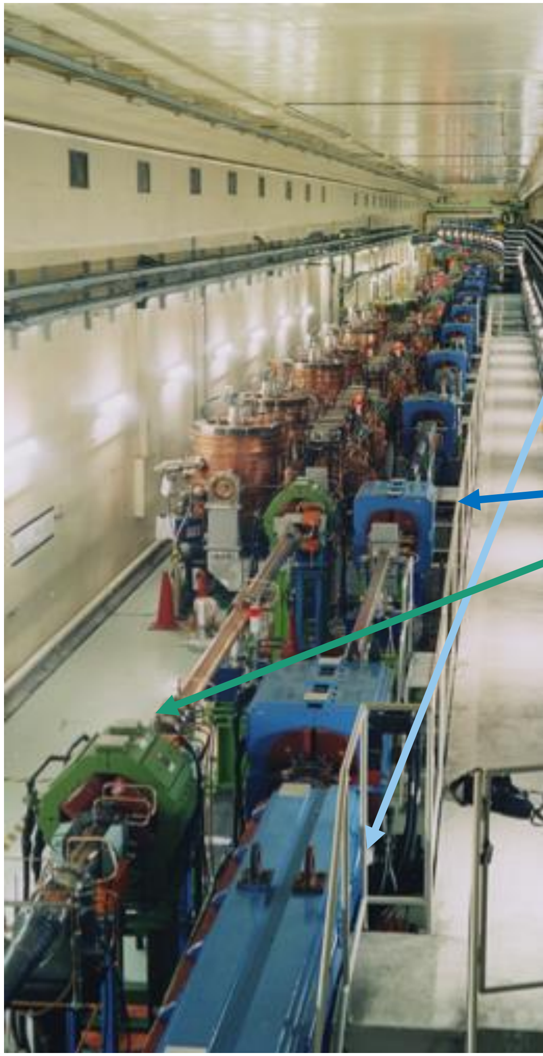
$$A_z = -b_0 x - \frac{b_1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{b_2}{6}(x^3 - 3xy^2) + \cdots$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -b_1 y + b_2 xy + \cdots$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = b_0 + b_1 x + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2) + \cdots$$

- 加速器ではそれぞれの成分$a_{0,1,2}$を生じる磁石を別々に作る。（特殊用途には成分を複合させる）

実際の加速器(KEKB)



- 偏向磁石　b_0のみ。粒子をx面内に曲げる。

$$B_y = b_0$$

- 収束磁石　b_1のみ。粒子を収束させる。

$$B_x = b_1 y \qquad B_y = -b_1 x$$

- 6極磁石　b_2のみ。色収差補正。

$$B_x = b_2 xy \qquad B_y = \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2)$$

運動方程式とその扱い

- 加速器は部品ごとに役割を分けている。
- それぞれの部品ごとに粒子の運動を解いて、つなげていく。

- 磁場のない空間、ドリフトスペースといっている。
- 磁石内
- 高周波加速

- 全体を線形理論で扱う。

運動方程式

- 変数の１次までを考慮した運動を考える。

調和振動子的

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + K(s)\mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{x}$=(x,y,z)

$p_x=x'$, $p_y=y'$, $p_z=-z'/\eta$

$\alpha(s)$: (local) momentum compaction factor

- 力がsの関数。

加速器の部品ごとにKは決まる。

運動方程式の具体な形

- ドリフトスペース，K=0

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = 0 \qquad s = \beta ct \qquad \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} = 0$$

- 偏向磁石　解は円運動

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ec\beta B_y}{m\gamma} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{eB_y}{mc\beta\gamma} = \frac{eB_y}{p}$$

- 収束磁石 $B_y = -b_1 x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{ec\beta b_1}{m\gamma}x \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = -K_1 x \qquad K_1 = \frac{eb_1}{p}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = K_1 y$$

運動方程式の解

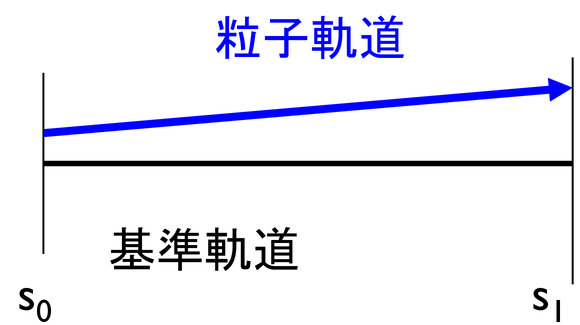
- ドリフト空間（何もないところ）: K(s)=0

$$x''=0 \qquad x'=p_x=const \qquad x_1=x_0+p_x s$$

$$z''=0 \qquad z'=-\alpha(s)p_z=0 \qquad z_1=z_0$$

zは$(1+p_x^2+p_y^2)^{1/2}$小さくなるが2次以上なので無視

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_0$$



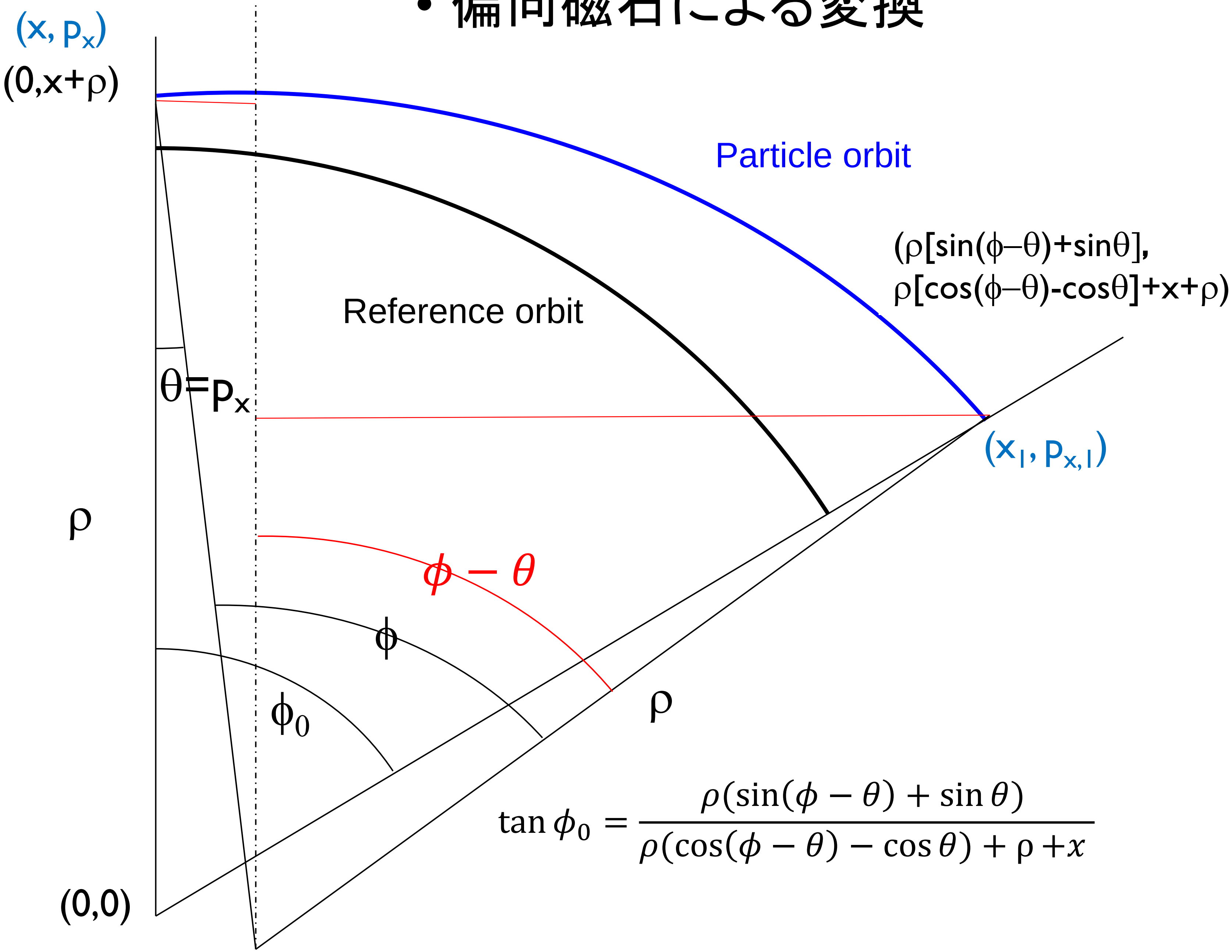
$$\det M = 1$$

- 偏向磁石　基準軌道はサイクロトロン運動の円周上にとる。

$$
\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_1 =
\begin{pmatrix}
\cos\frac{s}{\rho} & \rho\sin\frac{s}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) \\
-\frac{1}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} & \cos\frac{s}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \sin\frac{s}{\rho} \\
0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\sin\frac{s}{\rho} & -\rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) & 0 & 0 & 1 & \rho\sin\frac{s}{\rho}-s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_0
$$

$$
\det M = 1
$$

- 偏向磁石による変換



$$\tan\phi_0 = \frac{\rho(\sin(\phi-\theta)+\sin\theta)}{\rho(\cos(\phi-\theta)-\cos\theta)+\rho+x}$$

- Take 1st order of x,p_x

(ρ[sin(ϕ–θ)+sinθ], ρ[cos(ϕ–θ)+cosθ]+x+ρ)

$$= (\rho \sin\phi + \rho(1-\cos\phi)p_x, \rho\cos\phi + \rho\sin\phi p_x + x\ )$$

$$x_1 = \sqrt{(\rho\sin\phi + \rho(1-\cos\phi)p_x)^2 + (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi p_x + x\ )^2} - \rho$$

$$\approx \cos\phi x + \rho\sin\phi p_x$$

$$\tan\phi_0 = \frac{\rho(\sin(\phi-\theta)+\sin\theta)}{\rho(\cos(\phi-\theta)-\cos\theta)+\rho+x}$$

$$= \frac{\rho\sin\phi + \rho(1-\cos\phi)p_x}{\rho\cos\phi + \rho\sin\phi p_x + x} \approx \tan\phi + \frac{\cos\phi - 1}{\cos^2\phi}p_x - \frac{\sin\phi}{\rho\cos^2\phi}x$$

$$p_{x,1} = p_x + \phi_0 - \phi = \cos\phi\, p_x - \frac{\sin\phi}{\rho}x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \rho\sin\phi \\ -\dfrac{\sin\phi}{\rho} & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} \qquad \det M = 1$$

- 収束磁石　基準軌道は磁石中心を通る直線

磁石の通り方で通過時間も運動量も変わらない（変数の１次までで）

x,y方向の運動方程式

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + K\mathbf{x} = 0 \qquad K = \frac{eB'}{p_0} \qquad \mathbf{x}=(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{K}\sin\sqrt{K}s & \cos\sqrt{K}s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{K}\sinh\sqrt{K}s & \cosh\sqrt{K}s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_0$$

$$\det M = 1$$

- 加速空洞　基準軌道は空洞中心を通る直線

  平均的な加速がない、小さい場合

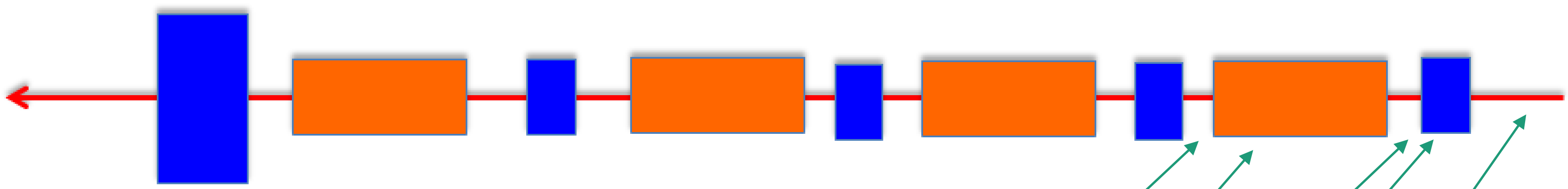
- 長さを無視する

$$
\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e\dot{V}/E_0 c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_0
$$

$$\det M = 1$$

加速器中の粒子の運動の線形理論

- 加速器の主な部品での粒子の運動は行列による変換で表される。
- 加速のある場所から別の場所の変換はあらかじめ行列をかけておけば、その行列を用い変換すればよい。



$$M = \cdots M_{D3} M_{B1} M_{D2} M_{Q1} M_{D1}$$

すべての部品に対して

$\det M = 1$　　その積も $\det M = 1$

円形加速器における周回行列

- Mを2x2行列、つまり一方向の運動のみ考える。
- 全周分の位相行列を掛け合わせ周回行列を作る。

- 固有値、固有ベクトルにより多周のふるまいを調べることができる。
- 周回行列は 2x2 実行列 $\det M = 1.$
- 2つの固有値の積は 1, なぜなら $\det M = 1.$ $\lambda_1 \lambda_2 = 1$
- 多周回で安定であるために固有値は$\lambda_{1/2} = e^{\pm i\mu}$ でなければならない。
- 固有値は複素数であるなら複素共役でなければならない。

Parametrization of the revolution matrix

$$M_{rev} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0 \qquad ad - bc = 1$$

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2} = e^{\pm i\mu}$$

$$a + d = 2\cos\mu \qquad a = 2\cos\mu + f \quad d = 2\cos\mu - f$$

$$-bc - f^2 = \sin^2\mu$$

$$b = \beta\sin\mu \qquad c = -\gamma\sin\mu \qquad f = \alpha\sin\mu$$

- まとめ

$$M_{rev} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$$

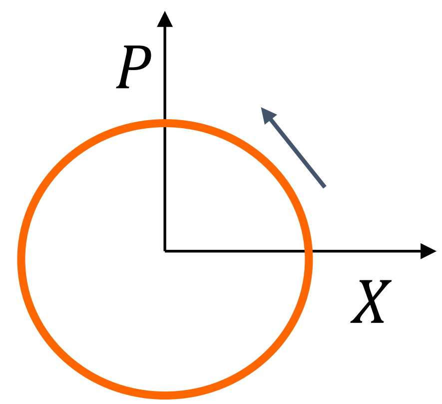
固有ベクトル

$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} \beta \\ i - \alpha \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} \beta \\ -i - \alpha \end{pmatrix}$$

$$V = (\mathrm{Re}\boldsymbol{z}_1 \quad -\mathrm{Im}\boldsymbol{z}_1) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}MV = \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ P_X \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$



- Normal coordinate $\boldsymbol{X} = V^{-1}\boldsymbol{x}$

$$X^2 + P_X^2 = W = \gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2$$

クーランシュナイダー不変量と呼ぶ

ベータトロン振動、チューン

$$M_{rev}(s) = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha(s)\sin\mu & \beta(s)\sin\mu \\ -\gamma(\mathrm{s})\sin\mu & \cos\mu - \alpha(s)\sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

- M_{rev}は起点のsに依る。

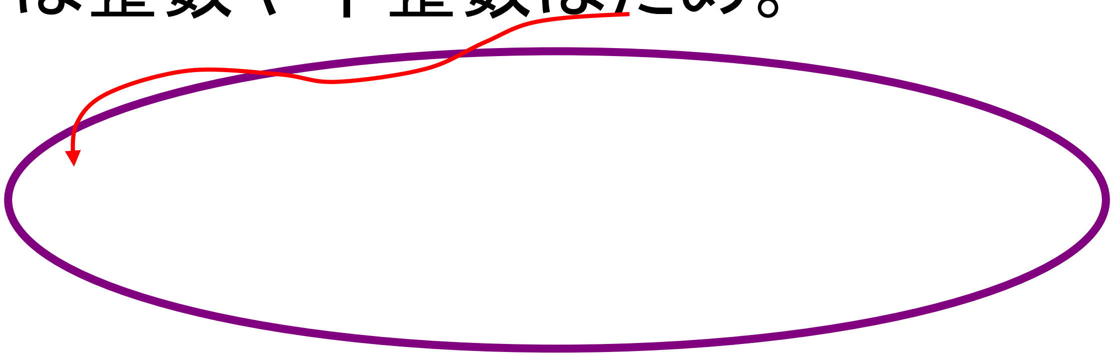
$$M_{rev}^n(s) = \begin{pmatrix} \cos n\mu + \alpha(s)\sin n\mu & \beta(s)\sin n\mu \\ -\gamma(\mathrm{s})\sin n\mu & \cos n\mu - \alpha(s)\sin n\mu \end{pmatrix}$$

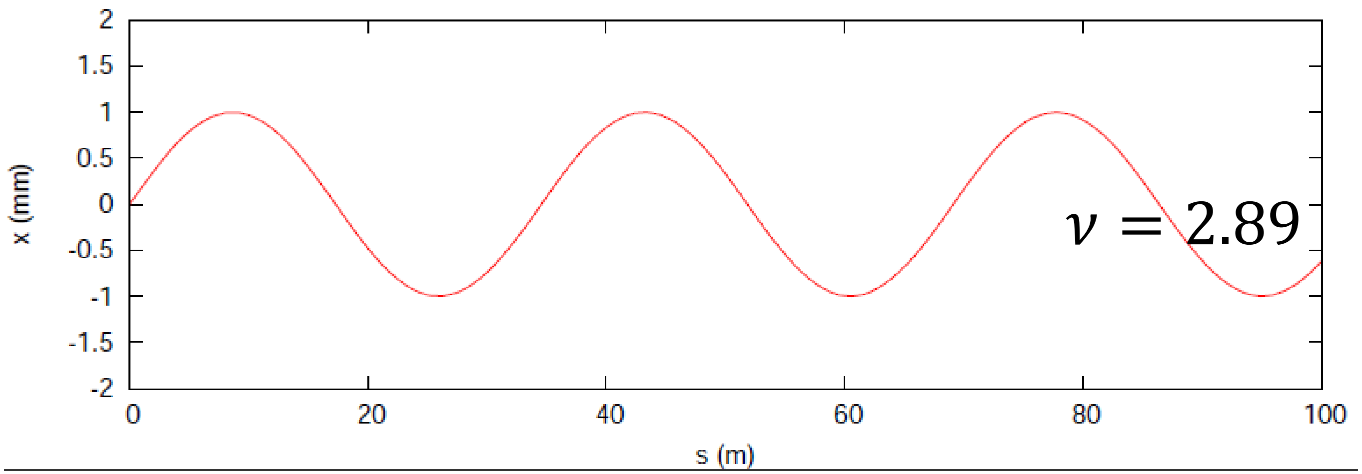
$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_n = M_{rev}^n \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$

- 周回ごとに位相が$\mu = 2\pi\nu$進む。ベータトロン振動。
- νをベータトロンチューンと呼ぶ。
- α,β関数と呼ぶ。

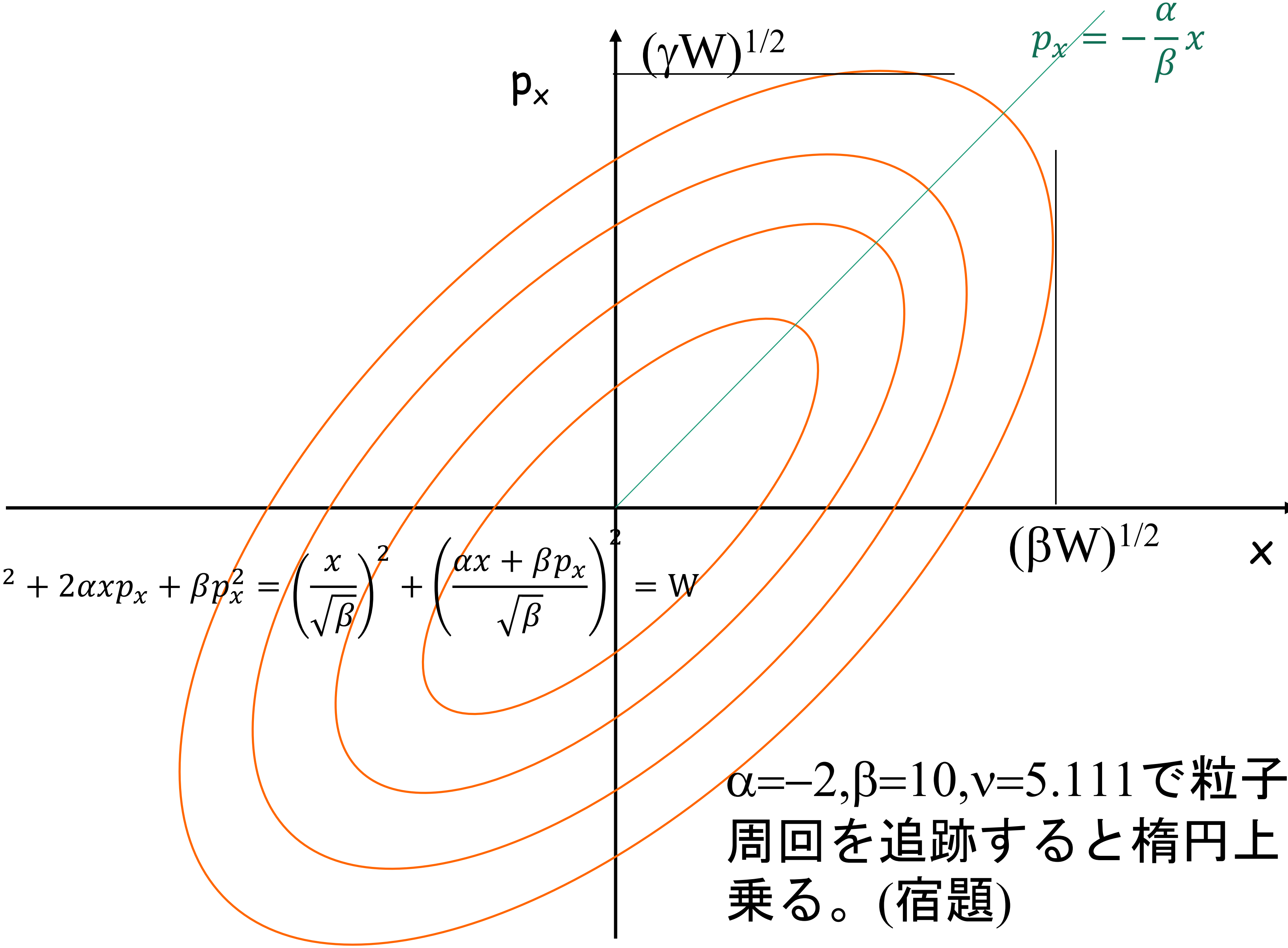
粒子の運動

- リングのそれぞれの場所で設計軌道の周りをベータトロン振動している。
- チューンは1周当たりの粒子の振動数
- チューンは整数や半整数はだめ。





あるsで見た周回ごとの粒子の運動



$$\gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha x + \beta p_x}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \mathrm{W}$$

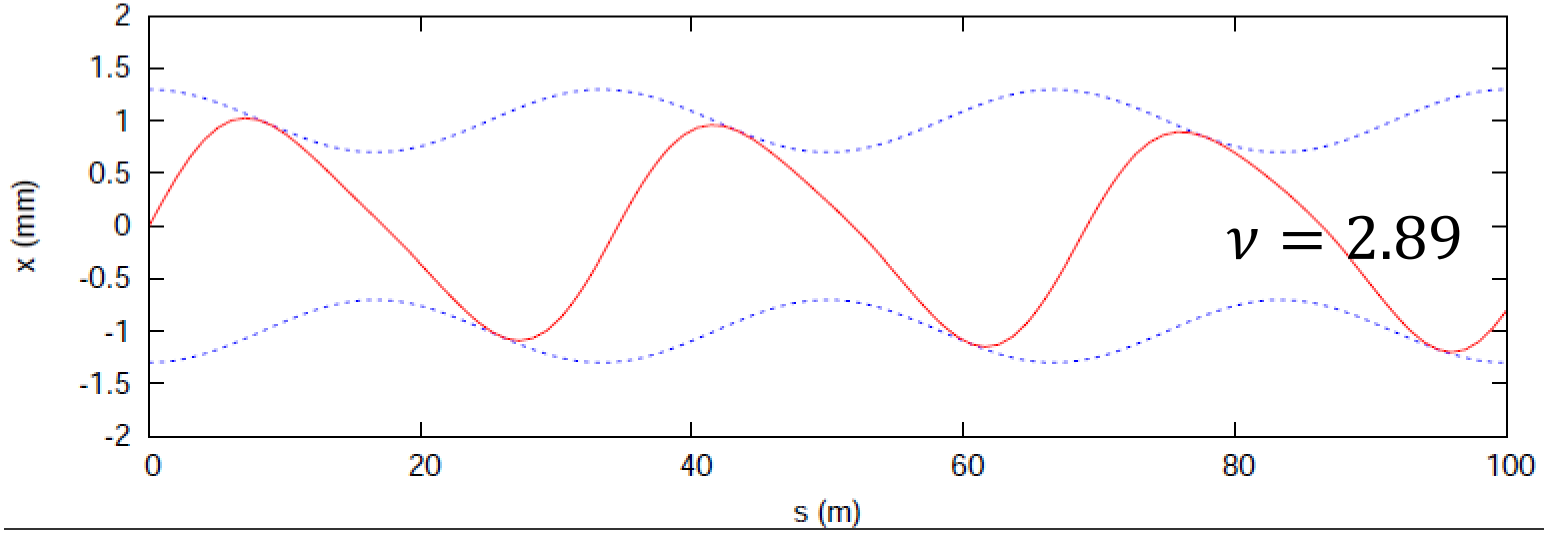
α=−2,β=10,ν=5.111で粒子の周回を追跡すると楕円上に乗る。(宿題)

ベータ関数

- 振動の包絡線

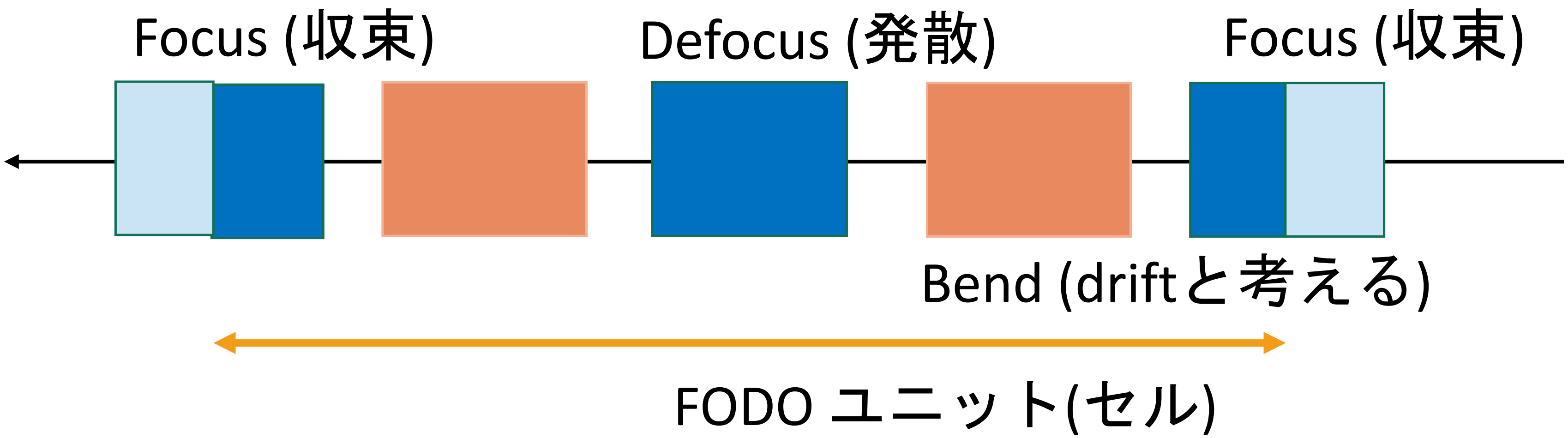
$$x = \sqrt{2W\beta(s)}\sin(\phi)$$

- ϕは1周で$\mu = 2\pi\nu$変わる。



簡単な加速器モデル

- 収束、発散の組み合わせで安定周回行列が得られるか。
- FODOセル



$$M_{cell} = M_{F/2} M_L M_D M_L M_{F/2}$$

- FODOセルをNユニットで円形リングを構成する。

$$M = M_{cell}^N$$

レポート-1

- KF-KD平面上でKF=0.01i, KD=0.01jとして安定になるKF、KDを点で打って、安定領域を図示せよ。

```
LQ = 1.; LD = 5.;
KF = 0.3; KD = 0.3;
```

$$MF2x = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] & \frac{1}{\sqrt{K_F}}\ \mathrm{Sin}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] \\ -\sqrt{K_F}\ \mathrm{Sin}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] & \mathrm{Cos}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] \end{pmatrix};$$

$$MF2y = \begin{pmatrix} \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] & \frac{1}{\sqrt{K_F}}\ \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] \\ \sqrt{K_F}\ \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] & \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{K_F}\ \frac{L_Q}{2}\right] \end{pmatrix};$$

$$ML = \begin{pmatrix} 1 & L_D \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$MDx = \begin{pmatrix} \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] & \frac{1}{\sqrt{K_D}}\ \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] \\ \sqrt{K_D}\ \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] & \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] \end{pmatrix};$$

$$MDy = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] & \frac{1}{\sqrt{K_D}}\ \mathrm{Sin}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] \\ -\sqrt{K_D}\ \mathrm{Sin}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] & \mathrm{Cos}\left[\sqrt{K_D}\ L_Q\right] \end{pmatrix};$$

```
Mcx = MF2x.ML.MDx.ML.MF2x;
Mcy = MF2y.ML.MDy.ML.MF2y;
Print["Mcx=", MatrixForm[Mcx], "  \nMcy=", MatrixForm[Mcy]];
Print["TrMx=", (Mcx[[1, 1]] + Mcx[[2, 2]]) / 2, "  TrMy=",
 (Mcy[[1, 1]] + Mcy[[2, 2]]) / 2]
```

$$Mcx = \begin{pmatrix} -0.438743 & 21.6444 \\ -0.0373077 & -0.438743 \end{pmatrix}$$

$$Mcy = \begin{pmatrix} -0.438743 & 1.86398 \\ -0.433214 & -0.438743 \end{pmatrix}$$

TrMx=-0.438743 TrMy=-0.438743

レポート-1

- $K_F=K_D=0.3$において,QF中心でのν_x, ν_y, α_x, β_x, α_y, β_yを求めよ。
- 初期条件x=1,2,3,4,5,$p_x=0$を用い、$M^n\mathbf{x}$をx-p_x面にプロットせよ。

粒子分布の変化

初期分布
$$\psi(\boldsymbol{x}, s_0) = \prod_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{0,i})$$

Particles are transferred by M

$$\psi(\boldsymbol{x}, s) = \prod_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{x} - M\boldsymbol{x}_{0,i}) = \det M^{-1} \prod_{i=1}^{N} \delta(M^{-1}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{0,i})$$
$$= \det M^{-1} \psi(M^{-1}\boldsymbol{x}, s_0)$$

$$\det M = 1$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, s) = \psi(M^{-1}\boldsymbol{x}, s_0)$$

- $M^{-1}\mathbf{x}$,s_0での密度がx, s での密度に移送される。

ビームの粒子分布

- 簡単な例一位相空間内でのガウス分布

$$\psi = \psi_x(x, \hat{p}_x)\psi_y(y, \hat{p}_y)\psi_z(z, \hat{p}_z)$$

$$\psi_x(x, p_x, s_0) = \frac{N}{2\pi\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{(\gamma_0 x^2 + 2\alpha_0 x\hat{p}_x + \beta_0\hat{p}_x^2)}{2\varepsilon_x}\right]$$

$$= \frac{N}{2\pi\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon_x}\boldsymbol{x}_x^t\begin{pmatrix}\gamma_0 & \alpha_0\\ \alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_x\right]$$

$$\boldsymbol{x}_x = \begin{pmatrix} x & \hat{p}_x \end{pmatrix}^t$$

ビーム形状をα、β、γで表す。

規格化

$$\det\begin{pmatrix}\gamma_0 & \alpha_0\\ \alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix}$$

$$= \beta_0\gamma_0 - \alpha_0^2 = 1$$

位相空間分布面積

- $\boldsymbol{x}\begin{pmatrix}\gamma_x & \alpha_x \\ \alpha_x & \beta_x\end{pmatrix}\boldsymbol{x}^t = \gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 = \varepsilon_x$で表される楕円の面積

$$\boldsymbol{X} = V^{-1}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = V\boldsymbol{X} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix}\beta & 0 \\ -\alpha & 1\end{pmatrix}$$

- Jacobian

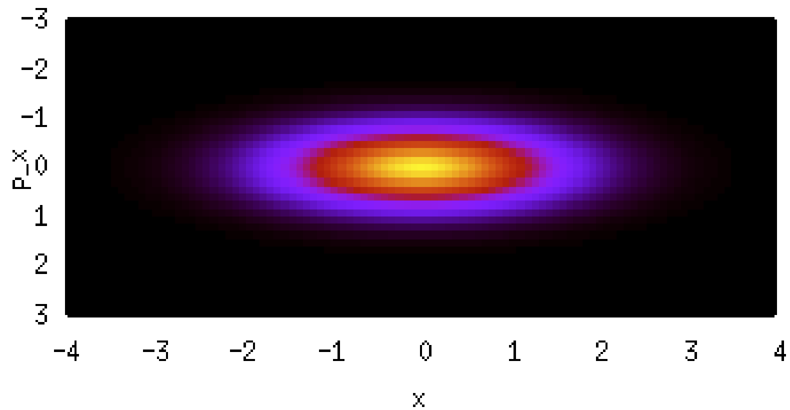
$$J = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial p_x}{\partial X} \\ \dfrac{\partial x}{\partial P_X} & \dfrac{\partial p_x}{\partial P_X}\end{vmatrix} = \det V = 1$$

- 面積

$$\iint_{\gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 = \varepsilon_x} dx\,dp_x = \iint_{X^2 + P_X^2 = \varepsilon_x} dX\,dP_X = \pi\varepsilon_x$$

初期分布

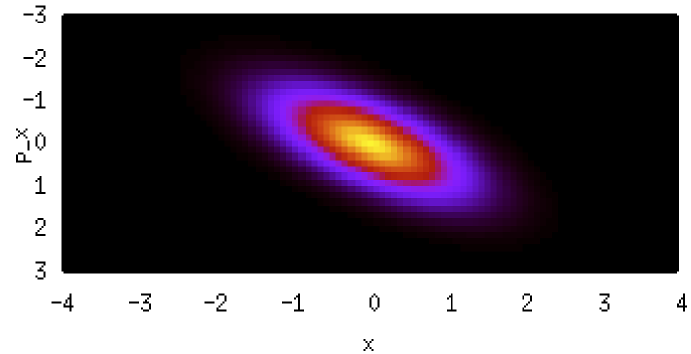
- サイズ 1mm, 角度広がり0.5mradのビーム



$$\psi_x(x, p_x, s_0) \propto \exp\left[-\frac{(0.5x^2 + 2\hat{p}_x^2)}{1}\right]$$

$$\beta_0 = 2\mathrm{m} \quad \alpha_0 = 0 \quad \gamma_0 = 0.5\mathrm{m}^{-1} \quad \varepsilon_x = 0.5\mathrm{mm.mrad}$$

分布の変化



$$\psi_x(\boldsymbol{x}_x, s) = \psi_x(M^{-1}\boldsymbol{x}_x, s_0)$$

$$= \frac{N}{2\pi\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon_x}\boldsymbol{x}_x^t M^{-1t}\begin{pmatrix}\gamma_0 & \alpha_0\\ \alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix}M^{-1}\boldsymbol{x}_x\right]$$

$$\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} = M^{-1t}\begin{pmatrix}\gamma_0 & \alpha_0\\ \alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix}M^{-1}$$

- 位相空間内でのビーム形状(α, β)は変わる。

$$\det\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} = 1 \qquad \det M = 1$$

- 位相空間面積(体積)を表すε_x、エミッタンスは変わらない。

加速によるビーム形状の変化

加速空洞(厚さs) で運動量がp_0からp_1に変化

$$M_{cav} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & p_0/p_1 \end{pmatrix} \qquad \det M = \frac{p_0}{p_1}$$

- 分布の変化

$$\psi_x(\boldsymbol{x}, s_1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{x,0}}\frac{p_0}{p_1}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon_{x,0}}\frac{p_0}{p_1}\boldsymbol{x}\, M^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_{x,0} & \alpha_{x,0} \\ \alpha_{x,0} & \beta_{x,0} \end{pmatrix} M^{-1,t}\boldsymbol{x}^t\right]$$

$$\gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 = (x \quad p_x)\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$

- 実効的なβ,αの変化

$$M^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_{x,0} & \alpha_{x,0} \\ \alpha_{x,0} & \beta_{x,0} \end{pmatrix} M^{-1,t} = \frac{p_1}{p_0}\begin{pmatrix} \gamma_{x,1} & \alpha_{x,1} \\ \alpha_{x,1} & \beta_{x,1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\beta_1 = \frac{p_1}{p_0}\left(\beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2\right)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \gamma_0 s$$

$$\gamma_1 = \frac{p_0}{p_1}\gamma_0$$

加速によるエミッタンスの縮小

$$\psi_x(\boldsymbol{x}, s_1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{x,0}}\frac{p_0}{p_1}\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon_{x,0}}\frac{p_0}{p_1}\boldsymbol{x}\begin{pmatrix}\gamma_{x,1} & \alpha_{x,1}\\ \alpha_{x,1} & \beta_{x,1}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}^t\right]$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0\frac{p_0}{p_1} = \varepsilon_0\frac{\beta_0\gamma_0}{\beta_1\gamma_1}$$

$\beta_{0/1}$: v/c

$\gamma_{0/1}$: relativistic factor

$$\varepsilon_1\beta_1\gamma_1 = \varepsilon_0\beta_0\gamma_0$$

$\varepsilon\beta\gamma$: Normalized emittance

- 規格化したエミッタンスは保存する

変換の性質

1. エネルギーが変わらない場合

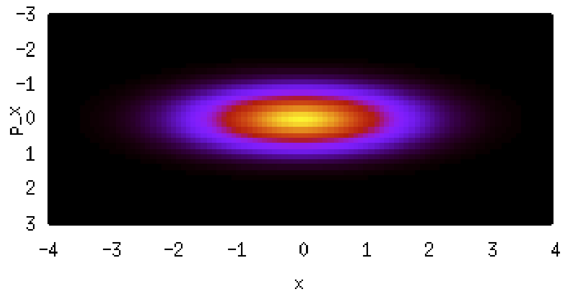
$$detM = |M| = 1$$

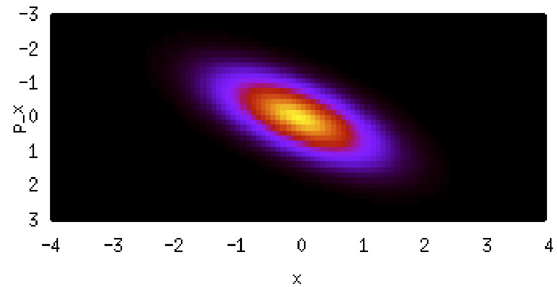
- x-x'空間での粒子の占める面積(エミッタンス)は変わらない。

2. エネルギーが増えていく場合

$$detM = |M| < 1$$

- x-x'空間での粒子の占める面積(エミッタンス)は小さくなる。(断熱減衰)　x-p_x空間では変わらないが、p_xが変わらなくても$x'=p_x/p_0$でp_0が大きくなるためx'は小さくなる。





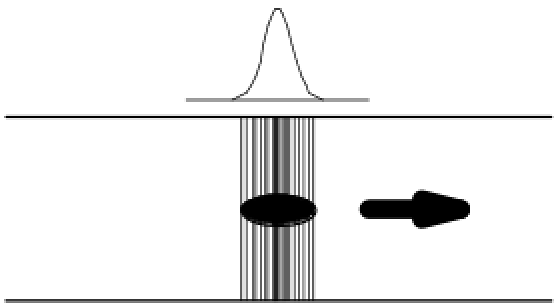
加速器の設計に重要な点

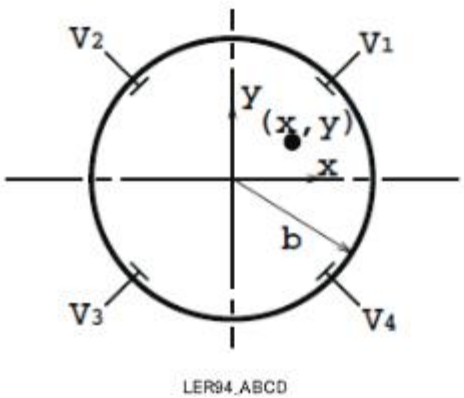
- 円形加速器の設計の第一歩は行列の固有値を$\lambda = \exp(\pm i\mu)$にすること
- 円形加速器の設計の次の一歩はβをどうするか。

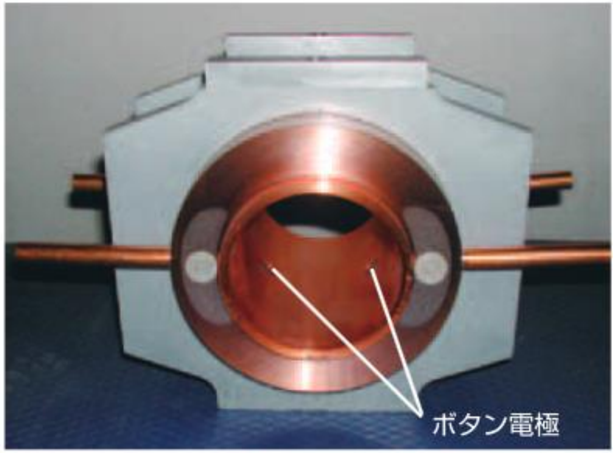
- 運動量誤差に対して軌道のずれを設計。
- 運動量誤差に対してチューンが変わらないように。
- どのくらい大きな振幅まで粒子がまわせるか、チェック。
- …..

ビームの(位置)モニター

- Measure betatron motion of a bunch centroid turn-by-turn.





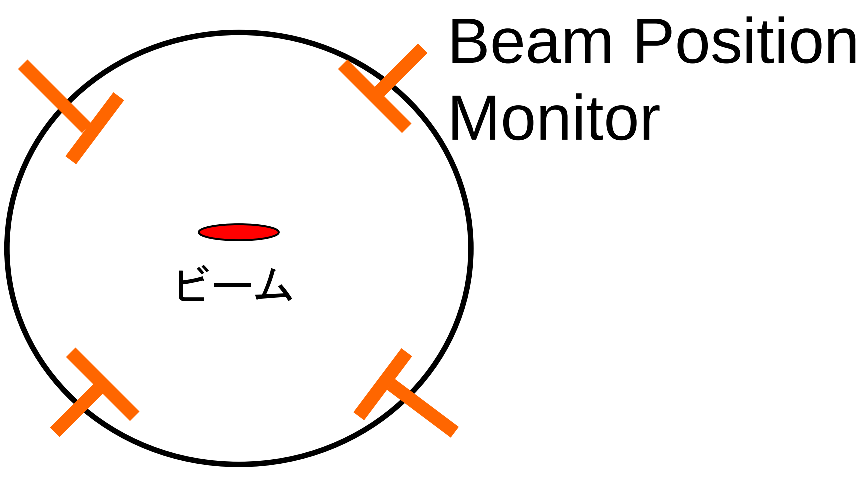


ビームの(位置)モニター

- リングのいろいろな場所にはビーム位置モニター(BPM)をつける、ビームの速い(バンチごと毎周)位置検出を行う。
- リングのある場所でビームの横方向の重心位置を観測するとビームがベータトロン振動していると、角周波数 $|n\nu_0+\nu_\beta|$ の振動が観測される。
- シンクロトロン振動しながらベータトロン振動する場合、$|n\nu_0+\nu_\beta+n_s\nu_s|$

n_sは整数、あとでまた意味を持って現れる。

普通はしていない。振動数を測定するとき揺する。不安定の時観測される。



モニターで観測される信号
周波数成分

- 周回信号

$$S = \sum_{n=0}^{N} \delta(t - nT_0)$$

- フーリエ変換

$$\int e^{i\omega t} S(t) dt \propto \sum_{n=0}^{N} \exp(in\omega T_0) = \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega T_0} = \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ベータトロン振動測定

1. 電気信号をフーリエ変換して表示する装置、スペクトルアナライザー
2. 周回ごとすべてのモニターでの位置を記録して、あとでオフラインでFFT解析
   - デジタル技術の進歩。ADC高速化、メモリー大容量化。

モニターで観測されるベータトロン振動周波数成分

- ベータトロン振動

$$x_n = a\exp(2\pi i n\nu_x)$$

$$X = \sum_{n=0}^{N} x_n \delta(t - nT_0) = a\sum_{n=0}^{N} \exp(2\pi i n\nu_x)\delta(t - nT_0)$$

$$T_0 = L/c$$

- フーリエ変換

$$\int e^{i\omega t}X(t)dt = a\sum_{n=0}^{N} \exp\left[in(2\pi\nu_x + \omega T_0)\right] = \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_\beta - p\omega_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega T_0} = \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

モニターで観測されるシンクロトロン振動、周波数成分

- シンクロトロン振動、ビームの到着時間が振動

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT_0 + \hat{\tau}\cos(\omega_s n T_0)]$$

- Fourier変換 $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[i\omega\{nT_0 - \hat{\tau}\cos(\omega_s n T_0)\}]$

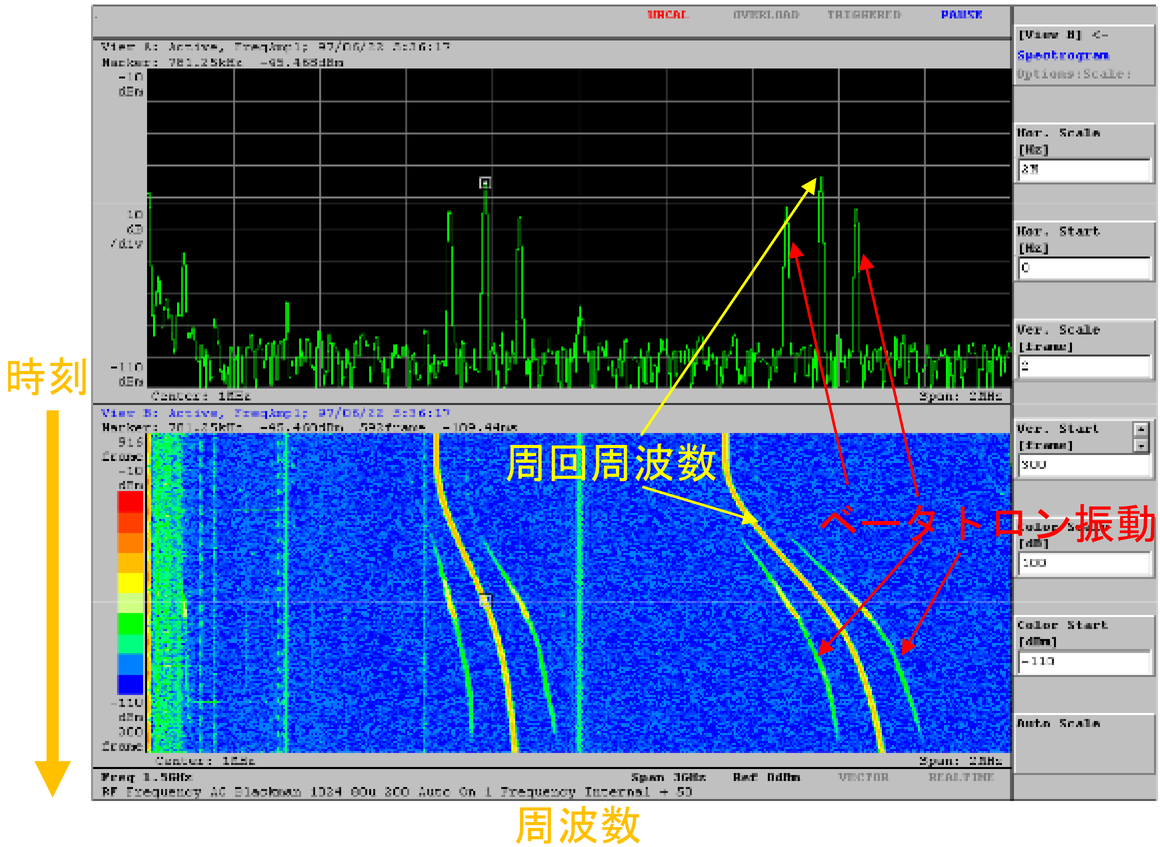
- 微小振動($\omega\hat{\tau} \ll 1$)とすると

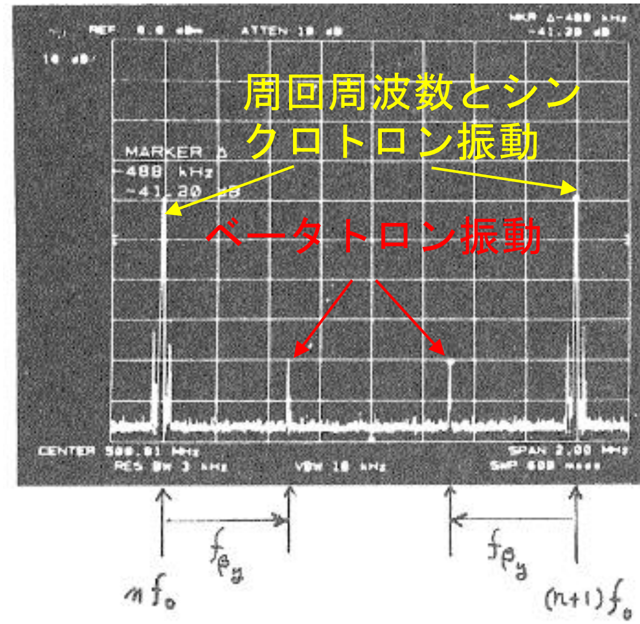
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(t)dt = -i\frac{\omega\hat{\tau}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{inT_0(\omega+\omega_s)} + e^{inT_0(\omega-\omega_s)}\right]$$

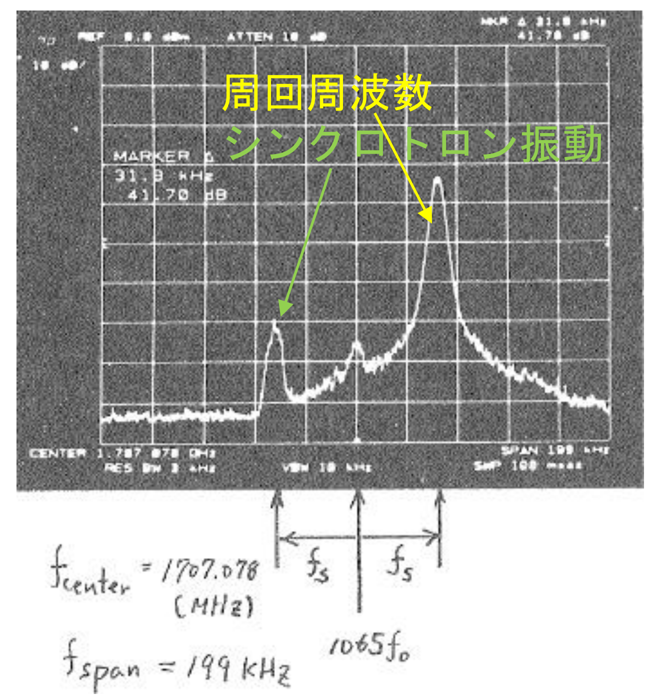
$$= -i\frac{\omega_0\hat{\tau}}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}[(p\omega_0 - \omega_s)\delta(\omega - p\omega_0 + \omega_s) + (p\omega_0 + \omega_s)\delta(\omega - p\omega_0 - \omega_s)]$$

- シンクロトロンサイドバンド $\omega = p\omega_0 \pm \omega_s$

測定例



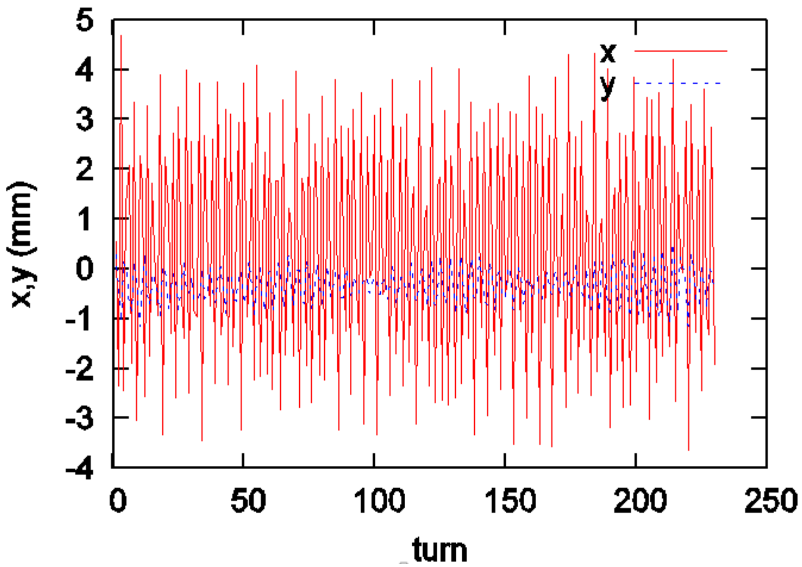


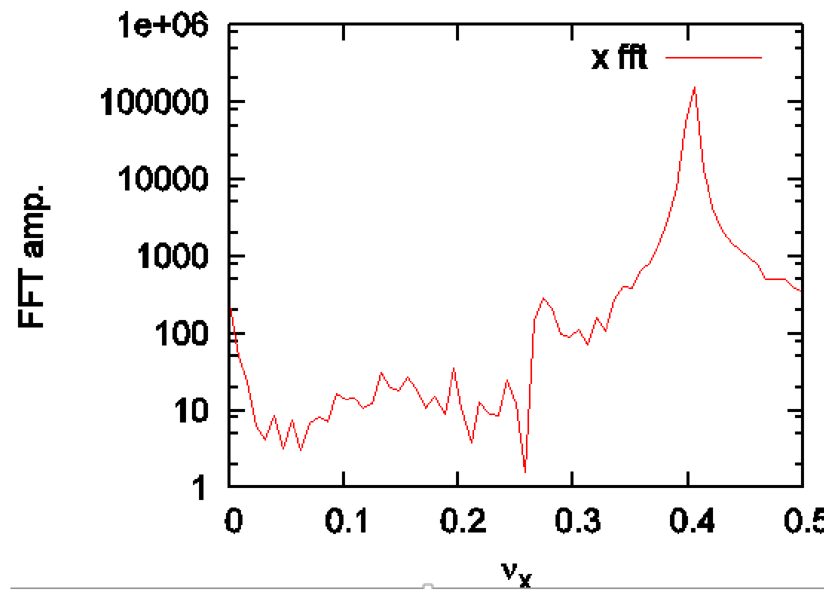


- 20年前はスコープの画像をポラロイドカメラで撮った。
- 今は測定器もWindowsベース。Jpeg保存。
- 加速によって周波数が時刻とともに速くなっている。

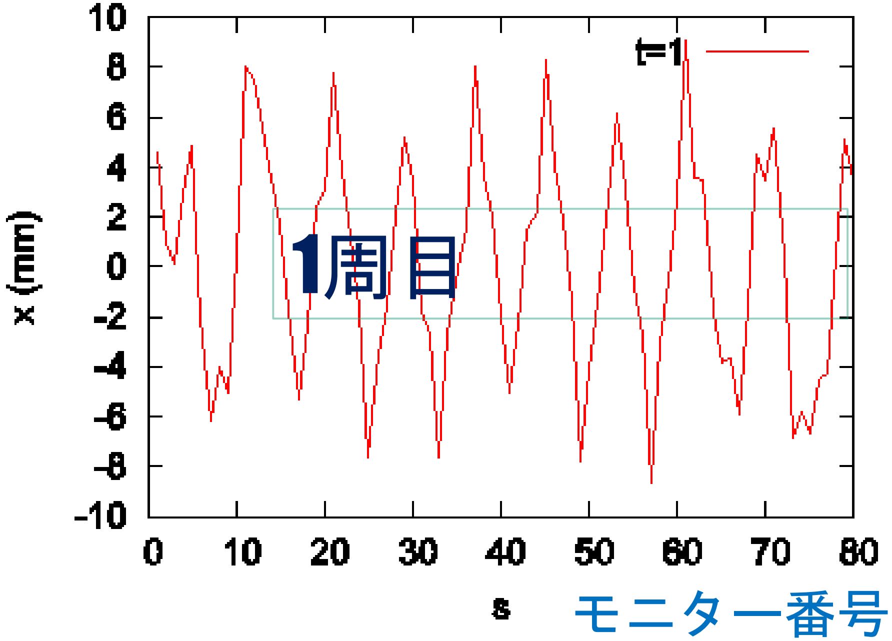
ターン毎の位置解析

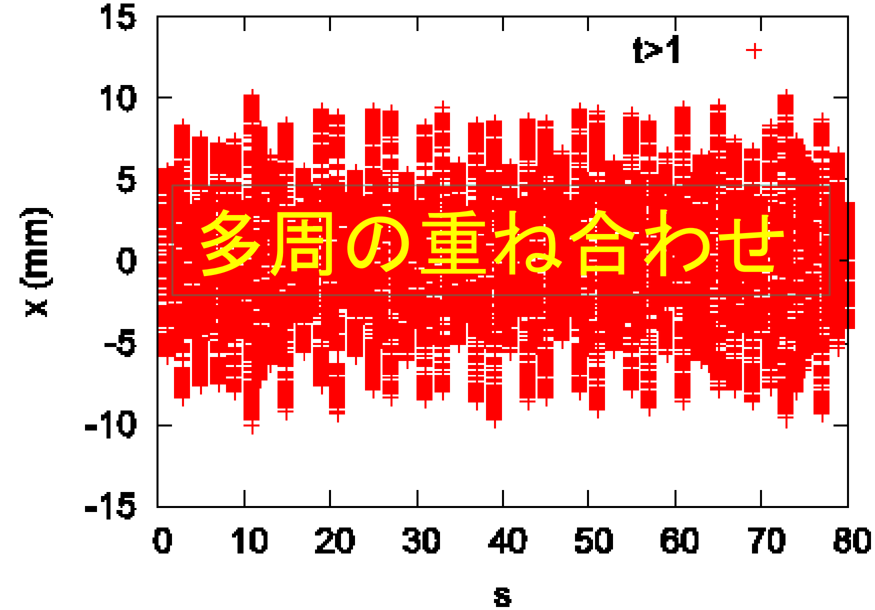
- x方向に振動を与える(ビームの入射時に設計軌道からずらして入射）。
- 位置モニターで通過位置を時々刻々記録。デジタルデータとして保存し、オフライン解析
- 振動データにFFTをかけることでチューンがわかる。





全モニター、ターン毎の位置解析



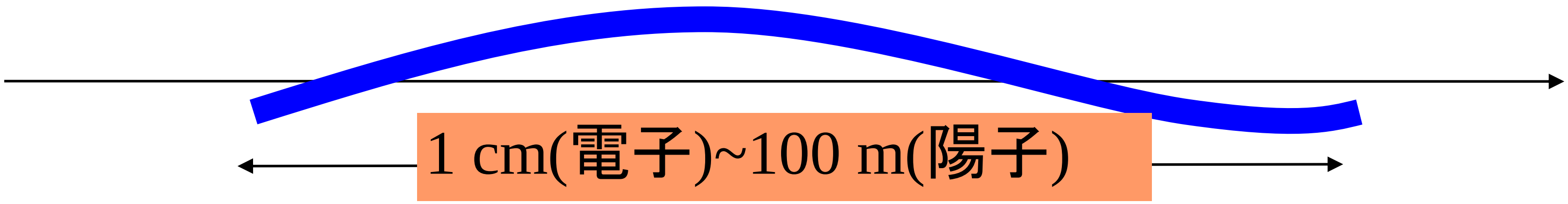


- 全周に配置したモニターで通過位置を時々刻々記録。
- 場所ごとに最大振幅が決まっている。包絡線、ベータ関数がわかる。

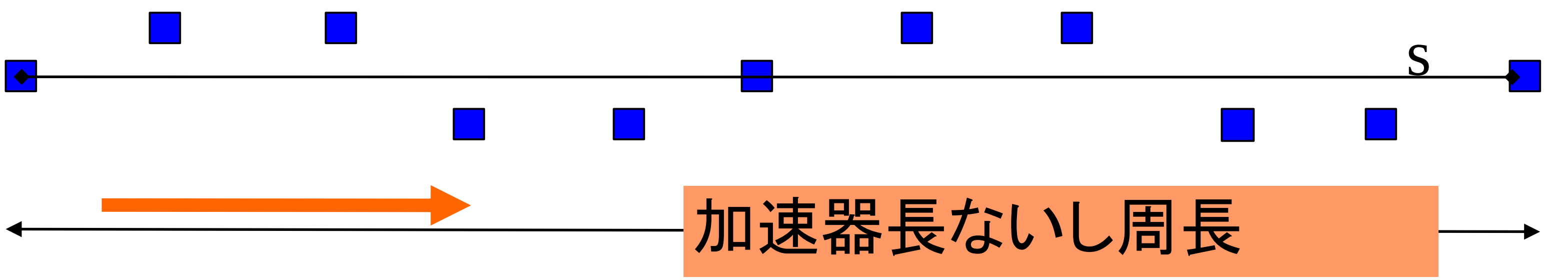
$$x = \sqrt{2W\beta(s)}\sin(\phi)$$

ビーム全体の振動と不安定性

- ビーム内の個々の粒子はベータトロン、シンクロトロン振動をする。
- バンチ全体としての運動



- バンチ列としての運動

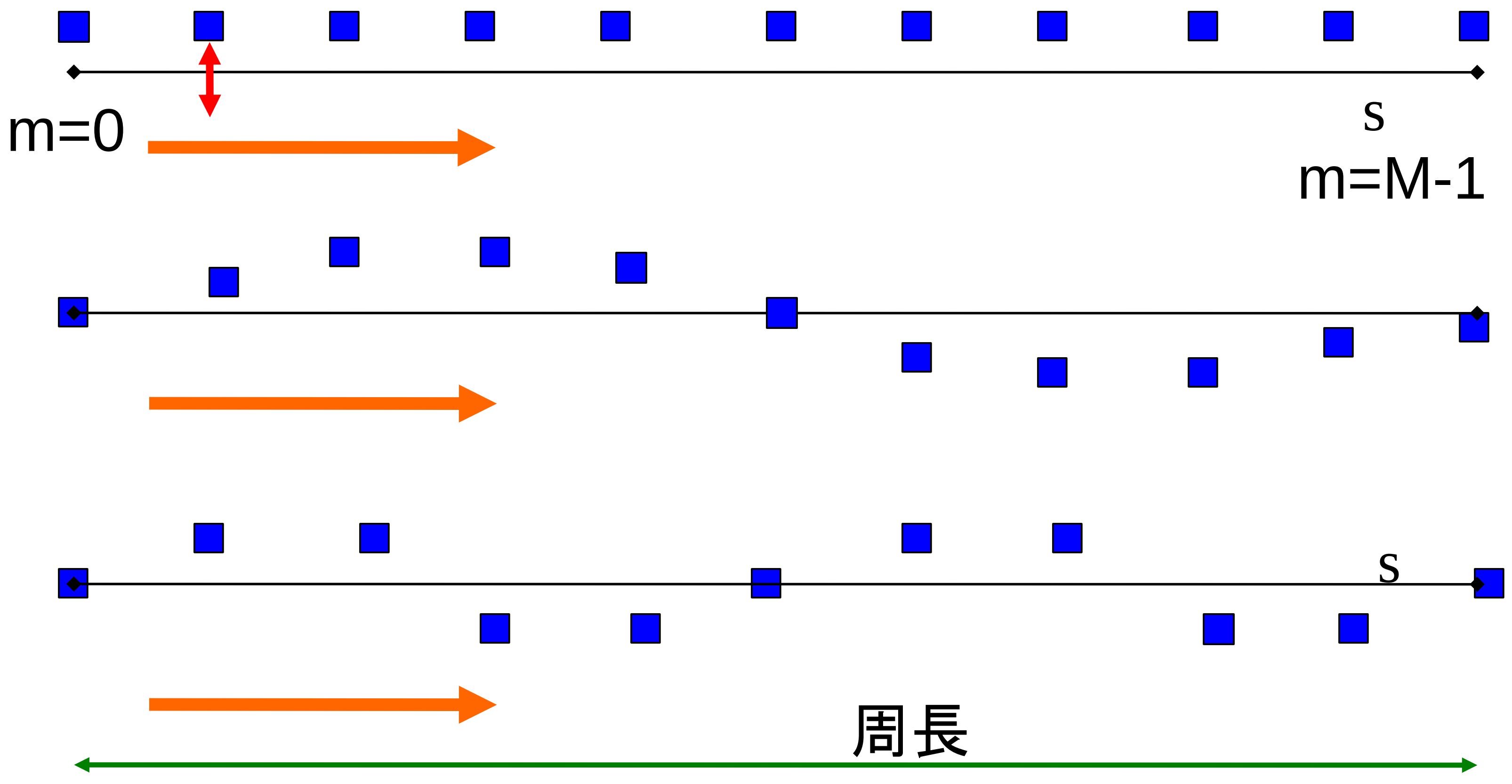


- z方向の相関
- 全体としての振動が大きくなる現象ービーム不安定性

多バンチ振動モード (snap shot)

- モード番号とその振幅で不安定性の程度を表す。

- ν=0
-
- ν=1
- ν=2



- 各バンチは**ベータトロン周波数(ω_β)**で振動しつつ、**光速**で右に運動する。

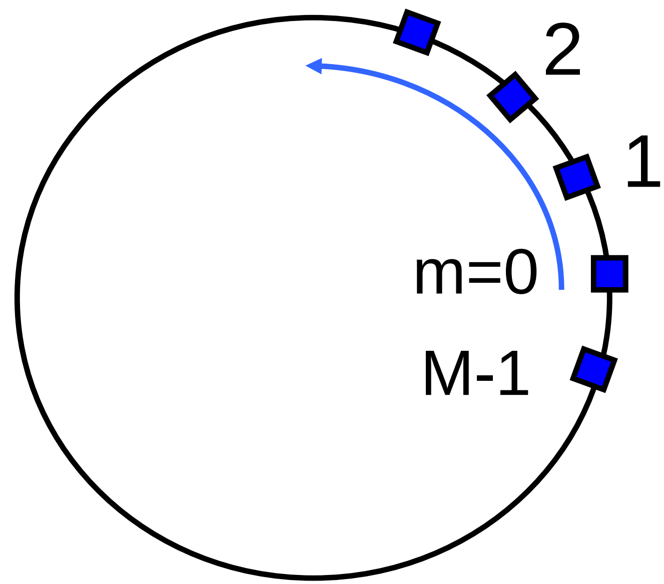
バンチ振動

- モードnによるバンチm (=0...M-1)の振動

$$\boldsymbol{x}_m(s) = \boldsymbol{a}^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{m\boldsymbol{n}}{M} - i\frac{\boldsymbol{\mu}}{L}s\right) \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, \delta z)^t$$

- バンチmのモニターへの到着時刻

$$ct_m = -\frac{mL}{M}$$



- モニターの観測するバンチ位置

$$x(t) = \sum_m x_m\left(-\frac{mL}{M}\right)\delta\left(t - \frac{mT_0}{M}\right)$$

$$= a^{[n]} \sum_m \exp\left[\frac{2\pi i m}{M}(n+\nu)\right]\delta\left(t - \frac{mT_0}{M}\right)$$

Fourier amplitude

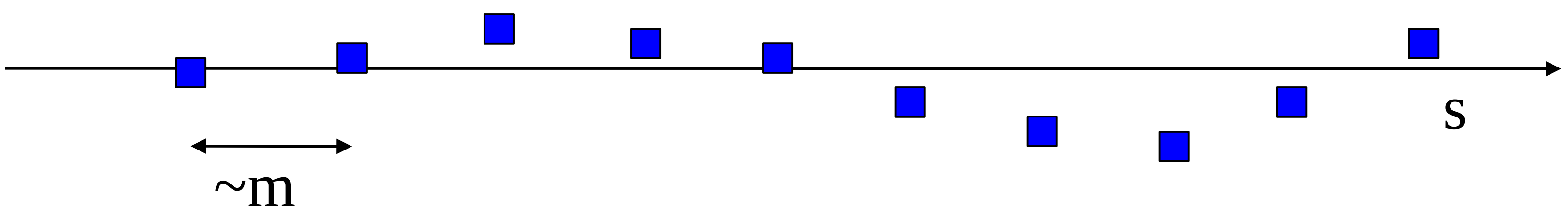
$$\int x(t)e^{-\omega t}dt = \sum_m \exp\left\{im\left[(n+\nu)\omega_0+\omega\right]\frac{T_0}{M}\right\}$$
$$= \sum_p \delta\left[\omega-(n+\nu+pM)\omega_0\right]$$

- 公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\omega T_0) = \omega_0\sum_{p=\infty}^{\infty}\delta(\omega-p\omega_0)$$

バンチ結合型不安定性

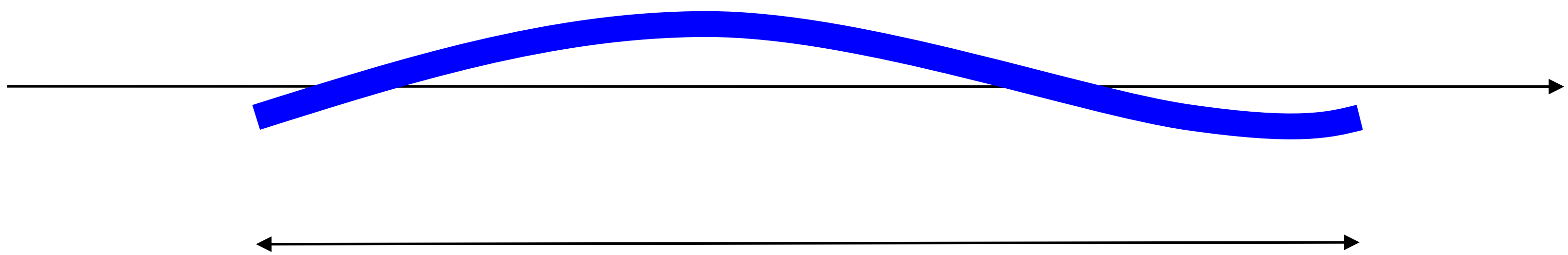
- それぞれのバンチの重心が所定の位置の周りを振動している。ベータトロン振動
- 振動にバンチ間の相関ができる。



- ある瞬間にリング全体のバンチの位置を見たとき、周期的であるはずで、その周長/波長を不安定性のモード数(ν)という。

単バンチ不安定性

- バンチ内での振動。同様にモード番号が定義される。
- バンチ内の粒子は全体としてはほぼ光速で運動しつつ、進行方向にも重心の周りを振動している。(シンクロトロン振動(ω_s))



1 cm(電子)~100 m(陽子)

- ベータトロン振動ω_βとシンクロトロン振動ω_sが複合した振動、シンクロベータトロン振動という。
- BPMで観測される振動数、$\omega_\beta + m\omega_s$、nはバンチ内の波数(正確に言うとz-p_z位相空間での波数)

どうなったら不安定が起きる

- リングのある場所に$|n\omega_0+\omega_\beta|$の周波数で振動しビームと結合する何かがある。
- 何かとは真空パイプに誘起された電磁場、イオン、電子…

バンチ結合型不安定性(x-y)

- バンチは均等に同じ粒子数(N)が詰まっている。

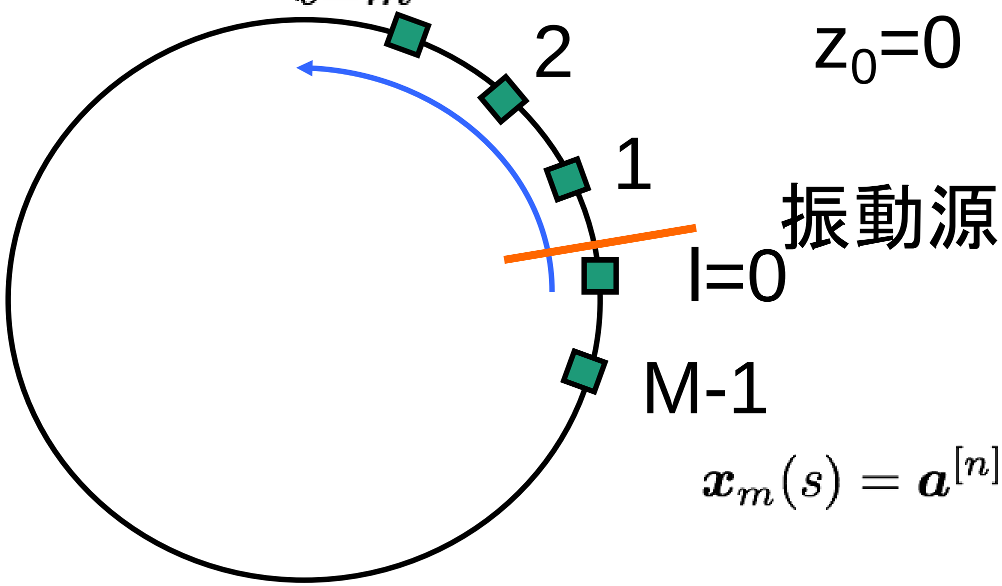
$$\frac{d^2\boldsymbol{x}_m(s)}{ds^2}+\left(\frac{\mu_0}{L}\right)^2\boldsymbol{x}_m(s)$$

$$=\frac{Nr_e}{\gamma}\sum_{\ell=m}^{N_w+m}W(z_\ell-z_m)\boldsymbol{x}_\ell(s+z_m-z_\ell)$$

$$\boldsymbol{x}=(x,y,\delta z)^t$$

δz: 参照時刻からのずれ

$z_0=0$ $z_m=mL/M$ s=ct



$$\boldsymbol{x}_m(s)=\boldsymbol{a}^{[n]}\exp\left(2\pi i\frac{m\boldsymbol{n}}{M}-i\frac{\boldsymbol{\mu}}{L}s\right)$$

航跡場(W)

- 運動方程式左辺

W:三角行列

$$\sum_{\ell=m}^{N_w+m} W(z_\ell - z_m)\boldsymbol{x}_\ell(s + z_m - z_\ell)$$

- Wがある周波数成分を持つ場合、前方のバンチ(x_l)がその周波数で振動していれば大きな効果を与える。共鳴。

解、不安定モード

$$\boldsymbol{x}_m(s) = \boldsymbol{a}^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{mn}{M} - i\frac{\mu}{L}s\right)$$

$$\frac{-\mu_n^2 + \mu_0^2}{L^2} = \frac{N r_e}{\gamma} \sum_{\ell=0}^{N_w} W(\Delta z_\ell) \exp\left[2\pi i \frac{(n+\nu)\Delta z_\ell}{L}\right]$$

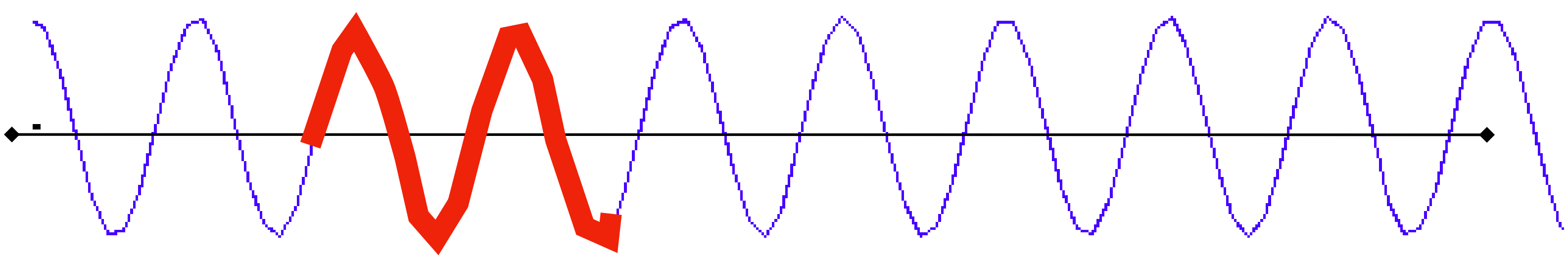
$$z_0 = 0 \quad \Delta z_\ell = \ell L/M$$

$\mathrm{Im}(\mu_n) < 0$ のモード n が不安定　　$\nu_\beta = \omega_\beta/\omega_0$

$$\mu = 2\pi\nu$$

単バンチ不安定性

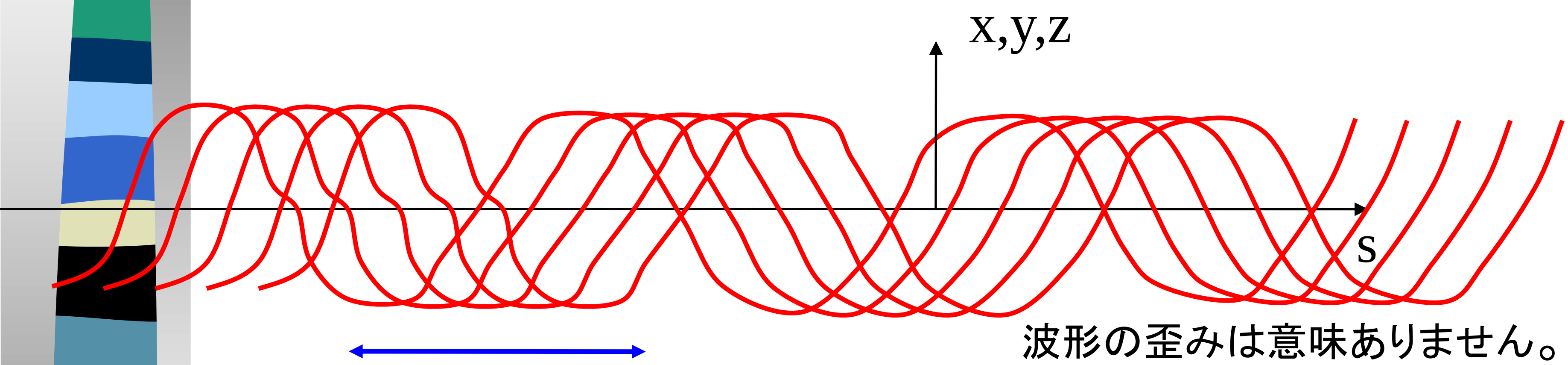
- リング全体にビーム粒子が満たされていると考える。(coasting beam)
- M→∞の極限
- 航跡場の相関距離が短い場合、ビーム粒子が一部に存在している場合と同じと考える。



$$\frac{-\mu_n^2+\mu_0^2}{L^2}=\frac{\rho_z r_e}{\gamma}\int_0^{L_w} dz W(z)\exp\left[2\pi i\frac{(n+\nu)z}{L}\right]$$

Landau damping (phase mixing)

- Coherent motionの位相が混じって不安定が成長できない。



エネルギーの違いによるdzの違い。Slippage factor (η)

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{\eta}{L} p_z \qquad \eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2}$$

Transition energy: あるγでηが0になる。Landau dampingがなくなり、ビームは不安定になる。