筑波大学数理物理系

粒子加速器

4. ビームと光、自由電子レーザー

大見　和史
高エネルギー加速器研究機構（KEK）
加速研究施設

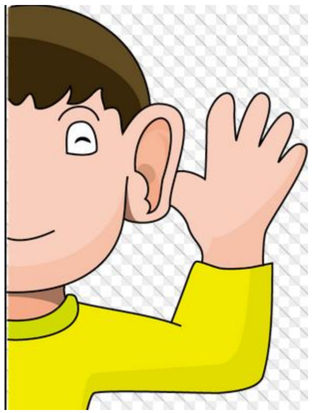
クーロン場から放射場

- 静止した電子
  - 静電場
- 等速直線運動する電子

- 加速度運動する電子

ドップラー効果

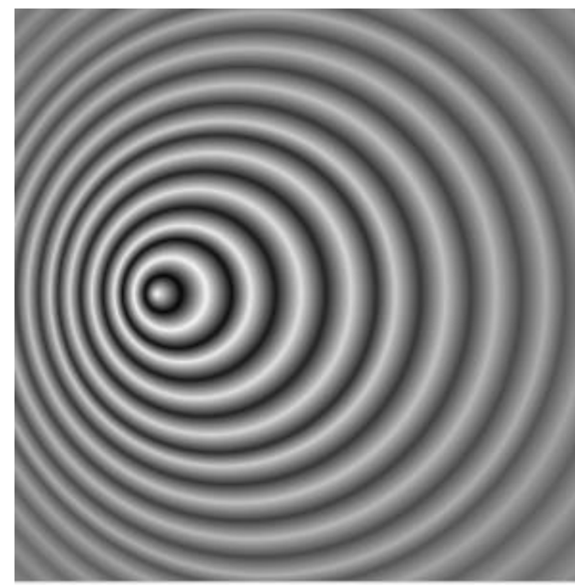
- 音のドップラー効果



- 音速は系(消防車、聞いている人)によって異なる。

$$\omega_{ob} = \omega_{emit}\frac{V}{V - v}$$

V:音速、v:音源の速度



波の源が左側に移っている。周波数は右よりも左の方が高い。

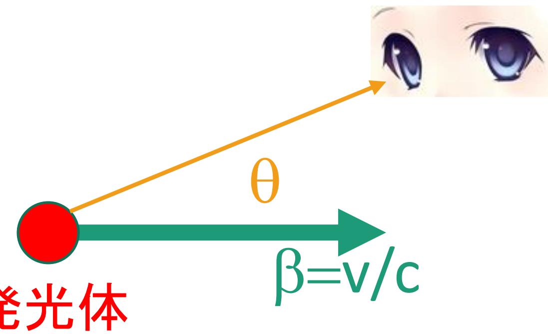
光のドップラー効果

- 光速は一定、音と違う。
- 4元ベクトル（c***k***, ω)のローレンツ変換。

$$\omega_{emit} = \frac{\omega_{ob} - \beta c k_{z,ob}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$c k_{z,ob} = \omega_{ob} \cos\theta$$

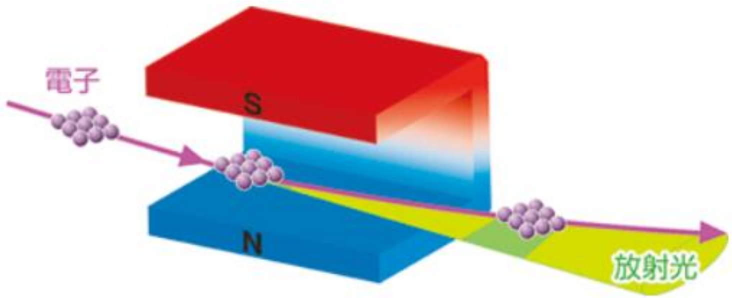
$$\omega_{ob} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}\,\omega_{emit}$$



θ=0:近づく、π: 遠ざかる

加速器での電子ビームによる発光

- シンクロトロン放射
  - 偏向磁石で電子の軌道が曲がる際の発光



  - アンジュレータでの軌道が周期的に曲がる際の発光

  - レーザーとビームの衝突

    レーザーによる横波電磁場により電子はアンジュレータと同様の運動をし、発光する。

ドップラー効果による観測周波数

- 偏向磁石
- 発光点周波数はあいまい。光は1/γの広がり。半径ρで回っているので、発光時間は

$$\delta t = \frac{\rho}{\gamma c}$$

- 進行方向速度

$$v = \frac{c \sin 1/\gamma}{1/\gamma} \approx c\left(1 - \frac{1}{6\gamma^2}\right)$$

- 電子の系での発光時間、周波数

$$\delta t' = \delta t/\gamma \qquad \omega_{emit} = \frac{1}{\delta t'} = \frac{\gamma^2 c}{\rho}$$

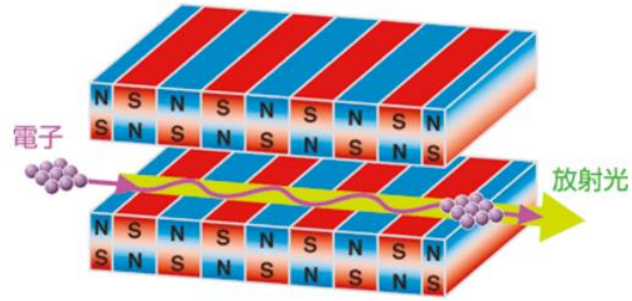
- 観測周波数

$$\omega_{ob} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}\omega_{emit} \sim \gamma\omega_{emit} \sim \frac{c}{\rho}\gamma^3$$

特性周波数

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c}{\rho}\gamma^3$$

アンジュレータ



- 電子の横方向の振動

$$\omega_u = \frac{2\pi c}{\lambda_u}$$

- 電子の静止系での振動、放射の周波数

$$\omega'_u = \gamma \omega_u \qquad t' = t/\gamma$$

- 実験室系での放射光の周波数

$$\omega_\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\omega'_u = 2\gamma^2\omega_u$$

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{2\gamma^2}\lambda_u$$

放出される光の波長はアンジュレータの波長の$1/2\gamma^2$

遅延ポテンシャル

- Lorentzゲージのマクスウェル方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$div\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- マクスウェル方程式に対するグリーン関数

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t')$$

$$G = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta(t-t'-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'$$

遅延ポテンシャル

運動する点電荷の作るポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(t-t'-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}dt'$$

$$\delta\bigl(f(t')\bigr) = \frac{\delta(t')}{|\,df(t')/dt'|}$$

$$f(t') = t - t' - \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-x')^2+(z-z')^2}}{c}$$

$$\frac{df(t')}{dt'} = -1 + \frac{(x-x')\frac{dx'}{dt'}+\cdots}{cr} = -1 + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{cr}$$

- Lenard-Wiechert potential

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}/c}$$

Lenard-Wiechert potential

- 運動する点電荷の作るポテンシャル

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}/c} \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}}{r - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}/c}$$

- **r**: 発光点(**x**’,t’)と観測点(**x**,t)を結ぶベクトル

$$\boldsymbol{r} = \big(x - x'(t'), y - y'(t'), z - z'(t')\big) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t')$$

$$r = c(t - t')$$

- 電荷は**x**’(t’)により運動している。過去の時刻t’の運動の履歴であり、電荷の固有時間ではない。相対論ではない。
- 一方電磁場はポテンシャルを(**x**,t)に関して微分して得られる。

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

運動する電子からの電磁場を求める

- 任意の時空座標(x,y,s,t)でのLenard-Wiechert potentialを粒子の運動（$x'(t')$...）の関数として求める。
- $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t')| = c(t - t')$の関係から、(x,y,s,t)の関数として求める。
- 時間空間微分により、電磁場を求める。

- あらかじめ微分をして電磁場の公式を作っておく。
  1. 電磁場をx’,y’,s’,t’の関数として求め、$r = c(t - t')$からx,y,s,tの関数として求める。一般的。
  2. 電磁場をx,y,s,tの関数として求める。Heaviside-Feynman表現

(x,t)微分から(x’,t’)微分への変換

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{t'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}$$

- $r = c(t - t')$をt’で微分

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'(t') \qquad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$c - c\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}r = \frac{x - x'(t')}{r}\frac{\partial x'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \cdots = \frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa} \qquad \kappa \equiv 1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t'}$$

- $r = c(t - t')$をxで微分

$$-c\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x'(t')}{r}\left(1 - \frac{\partial x'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - \frac{y - y'(t')}{r}\frac{\partial y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} - \frac{z - z'(t')}{r}\frac{\partial z'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$= \frac{x - x'(t')}{r} - \frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{x - x'(t')}{c\kappa r}$$

$$\mathrm{grad} = \mathrm{grad}' - \frac{\mathbf{n}}{c\kappa}\frac{\partial}{\partial t'}$$

電場

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}/c}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{e\boldsymbol{v}}{r - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}/c}$$

- 粒子はt'で表される世界にいる。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r_v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{v}}{r_v}\right]$$

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')$$

$$r_v \equiv r - \mathbf{r}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c} = r\kappa$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^2}\mathrm{grad}' r_v - \frac{\mathbf{r}}{c r_v^3}\frac{\partial r_v}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{r}{r_v^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} + \frac{1}{c^2}\frac{r\boldsymbol{v}}{r_v^3}\frac{\partial r_v}{\partial t'}\right]$$

$$\mathrm{grad}' r_v = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

$$\frac{\partial r_v}{\partial t'} = \frac{\partial r}{\partial t'} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{r}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa^3 r^2}\frac{1}{\gamma^2}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{\kappa^3 r}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\times\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial c t'}\right\}\right]$$

~1/r^2 : クーロン場　　~1/r : 放射場

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^2}\,\mathrm{grad}' r_v - \frac{\mathbf{r}}{c r_v^3}\frac{\partial r_v}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{r}{r_v^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} + \frac{1}{c^2}\frac{r\boldsymbol{v}}{r_v^3}\frac{\partial r_v}{\partial t'}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^2 r}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right) - \frac{1}{c r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\frac{\partial r_v}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{r}{r_v^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^2 r}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right) - \frac{1}{c r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(-\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{r}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{r}{r_v^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^2 r}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right) - \frac{1}{c r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(-\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{c}\right) + \frac{1}{c^2 r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\mathbf{r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{r}{r_v^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(\frac{r_v}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{cr} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2 r_v^3}\left\{\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\mathbf{r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} - r\left(r - \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right\}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_v^3}\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2 r_v^3}\mathbf{r}\times\left\{\left(\mathbf{r} - \frac{r\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right\}\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r}{r_v^3\gamma^2}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{r^2}{r_v^3}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\times\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial c t'}\right\}\right]$$

磁場

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \qquad \mathrm{rot} = \mathrm{rot}' - \frac{\mathbf{r}}{cr_v} \times \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\mathrm{rot}\, a\boldsymbol{b} = a\, \mathrm{rot}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \mathrm{grad} a \qquad \mathrm{rot}'\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\mathrm{rot}'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(\mathrm{rot}'\frac{\boldsymbol{v}}{r_v} - \frac{\mathbf{r}}{cr_v} \times \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\boldsymbol{v}}{r_v}\right)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{r_v^2} \times \mathrm{grad}' r_v + \frac{1}{r_v}\mathrm{rot}'\boldsymbol{v} - \frac{\mathbf{r}}{cr_v} \times \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\boldsymbol{v}}{r_v}\right)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{r_v^2} \times \mathrm{grad}' r_v - \frac{\mathbf{r}}{cr_v^2} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} + \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{v}}{cr_v^3}\frac{\partial r_v}{\partial t'}\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}}{c}$$

- 磁場は電場から直ちに求められる。電場を求めることに集中。

電磁場のHeaviside-Feynman表現

- Heaviside-Feynman expression

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathrm{r}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{n}}{r^2} + \frac{\mathrm{r}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{n}}{r^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}}{dt^2}\right]$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{r}{r_v}\frac{d}{dt'} \qquad \dot{\boldsymbol{n}} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = c\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}}{r} \qquad \frac{d\boldsymbol{r}^2}{dt'} = r\dot{r} = \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = -rc(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$$

$$r_v \equiv r - \mathbf{r}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c} = \mathrm{r}(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) \qquad \dot{r}_v = \dot{r} - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = -c(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) + c\beta^2 - r(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})$$

$$\Downarrow$$

- Lienard-Wiechert expression

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r}{r_v^3}\frac{1}{\gamma^2}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{r^2}{r_v^3}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\times\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial ct'}\right\}\right]$$

Methematicaの助け

In[203]:= $\mathrm{rv} = \mathrm{r}\,(1 - \beta\mathrm{n})\,;$ (* βn=(β.n) βnd=(dβ/dt'.n) ndβ=(β.dn/dt') *)

$$\mathrm{ndot} = \frac{\mathrm{c}\,(\beta\mathrm{n}\;\mathrm{n} - \mathrm{b})}{\mathrm{r}}\,;$$

$$\mathrm{rvdot} = -\mathrm{c}\;\beta\mathrm{n} + \mathrm{c}\;\beta^2 - \mathrm{r}\;\beta\mathrm{nd}\,;$$

$$\mathrm{nd}\beta = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{r}}\left(\beta\mathrm{n}^2 - \beta^2\right);$$

$$\mathrm{E0} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{r}^2}\;\frac{\mathrm{rv}^3}{\mathrm{r}}\,;\quad (*\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{rv}^3}\ *)$$

$$\mathrm{E1} = \frac{\mathrm{ndot}\;\mathrm{r}^2 + 2\;\mathrm{r}\;\mathrm{c}\;\beta\mathrm{n}\;\mathrm{n}}{\mathrm{c}\;\mathrm{rv}\;\mathrm{r}^2}\;\frac{\mathrm{rv}^3}{\mathrm{r}}\,;\quad (*\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{rv}^3}\ *)$$

$$\mathrm{E2} = \frac{1}{\mathrm{c}}\;((\mathrm{nd}\beta\;\mathrm{n} + \beta\mathrm{nd}\;\mathrm{n} + \beta\mathrm{n}\;\mathrm{ndot} - \mathrm{bd})\;\mathrm{rv} - (\beta\mathrm{n}\;\mathrm{n} - \mathrm{b})\;\mathrm{rvdot})\,;\quad (*\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{rv}^3}\ *)$$

```
Etot = FullSimplify[E0 + E1 + E2]
Expand[Coefficient[Etot, r, 0]]
Coefficient[Etot, r, 1]
```

Out[206]= $$\frac{\mathrm{bd}\;\mathrm{r}\;(-1 + \beta\mathrm{n}) + (\mathrm{b} - \mathrm{n})\left(\mathrm{c}\left(-1 + \beta^2\right) - \mathrm{r}\;\beta\mathrm{nd}\right)}{\mathrm{c}}$$

Out[207]= $-\mathrm{b} + \mathrm{n} + \mathrm{b}\;\beta^2 - \mathrm{n}\;\beta^2$

Out[208]= $$\frac{-\mathrm{bd} + \mathrm{bd}\;\beta\mathrm{n} - \mathrm{b}\;\beta\mathrm{nd} + \mathrm{n}\;\beta\mathrm{nd}}{\mathrm{c}}$$

運動する電子からの電磁場を求める

- 粒子の運動を解く。$\boldsymbol{x}'(t'), \boldsymbol{\beta}(t'), \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$
- ***E***(t’)を求める。

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r}{r_v^3}\frac{1}{\gamma^2}(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) + \frac{r^2}{r_v^3}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial ct'}\right\}\right]$$

- $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t')| = c(t-t')$の関係から、***E***(x,y,s,t)を求める。

荷電粒子のエネルギー損失

- Pointing vector

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c\mu_0}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{1}{r^2\kappa^6}\left|\boldsymbol{n} \times \left\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\right\}\right|^2 \boldsymbol{n}$$

- 単位時間での放出エネルギー

$$W = \int \boldsymbol{S}\, dS$$

電子の運動から放出される光
双極子輻射

- $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{0}$

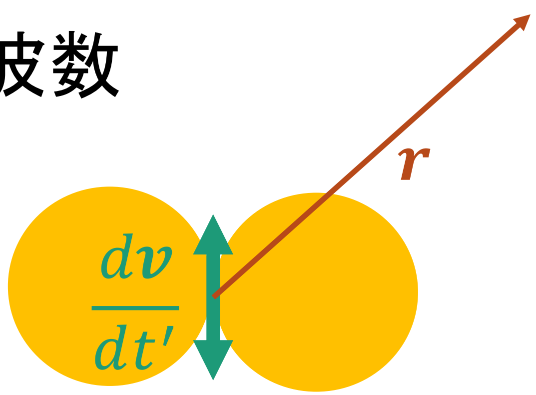
$$\boldsymbol{S} \approx \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{1}{r^2}\left|\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\boldsymbol{n} - \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\right|^2 \boldsymbol{n}$$

$r_v \approx r$

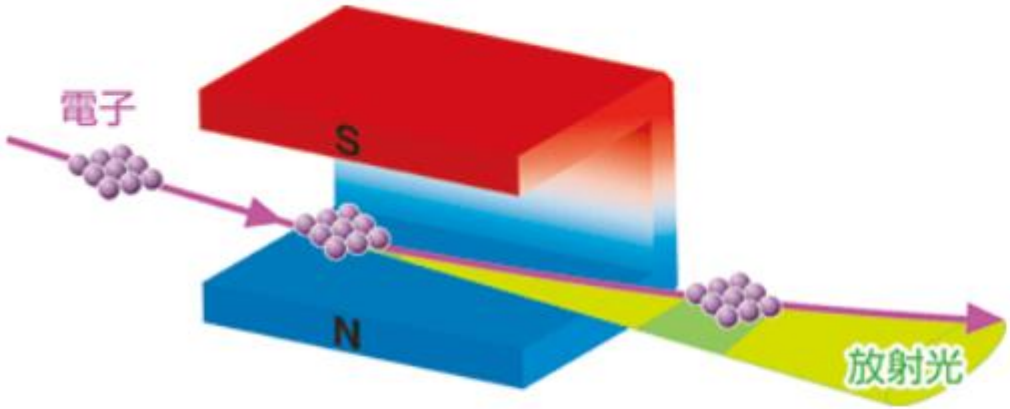
- 放出エネルギー

$$W = \int \boldsymbol{S}\, dS \approx \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\right|^2$$

- 電磁波の周波数＝電子の振動周波数



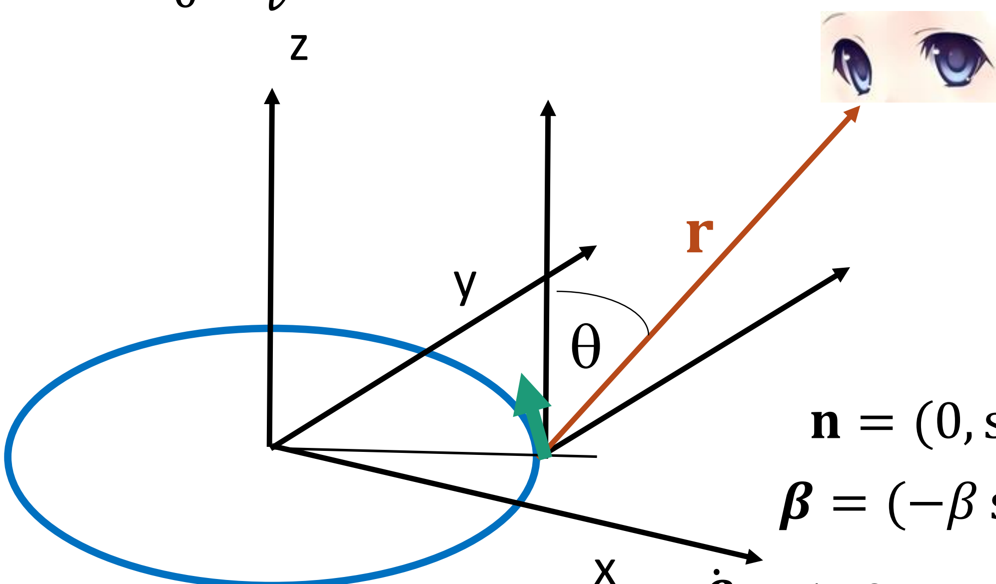
シンクロトロン放射



等速円運動する電子の放射

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{r^2}{r_v^3}\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}\right] \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t'}$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{r^2}{r_v^3}\left[\left(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]$$



十分遠方

$$\mathbf{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{\beta} = (-\beta \sin\omega t', \beta \cos\omega t', 0)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = (-\beta\omega \cos\omega t', -\beta\omega \sin\omega t', 0)$$

等速円運動する電子の生成する電場

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{r\kappa^3}\left[\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]$$

$$\kappa \equiv 1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = 1 - \beta\cos\omega t'\sin\theta$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{\beta\omega}{r\kappa^3}\begin{pmatrix} \cos\omega t' - \beta\sin\theta \\ \sin\omega t' \ \cos^2\theta \\ \sin\omega t' \sin\theta \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\omega t'$~0,θ~π/2でκ~0,Ex が大きくなる。
水平偏光。

等速円運動する電子の放出エネルギー

$$\left|\boldsymbol{n} \times \{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}\right|^2$$

$$= \beta^2\omega^2\{(\cos\omega t' - \beta\sin\theta\ )^2 + \cos^2\theta\sin^2\omega t'\}$$

$$= \beta^2\omega^2\{(1-\beta^2)\cos^2\theta + (\beta - \sin\theta\cos\omega t')^2\}$$

- dt’で放出されたエネルギーをdtで受け取る。

$$\frac{dW}{d\Omega}d\Omega dt' = Sr^2 d\Omega dt \qquad \frac{dW}{d\Omega} = Sr^2\kappa \qquad \kappa = \frac{dt}{dt'}$$

- 放射エネルギー分布

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2\beta^2\omega^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{\frac{1}{\gamma^2}\cos^2\theta + (\beta - \sin\theta\cos\omega t')^2}{(1-\beta\sin\theta\cos\omega t')^5}$$

κ^5

- β~1では粒子の進行接線方向に光を放出、θ~π/2,ωt’~0

電子加速器の放射光

- 単位時間でのエネルギー放出

$$W = \frac{e^2\beta^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 c}\gamma^4 \qquad v = \rho\omega$$

- 1周当たりの電子のエネルギー放出

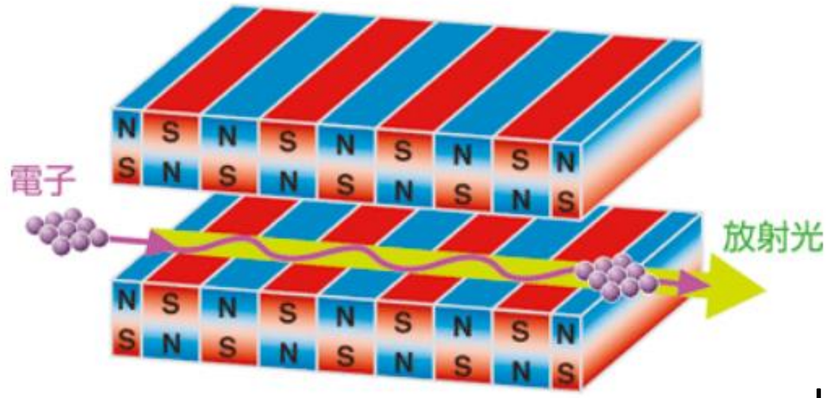
$$P = W \times \frac{2\pi\rho}{v} = \frac{e^2\beta}{3\epsilon_0}\frac{\gamma^4}{\rho} = \frac{4\pi mc^2 r_e\beta}{3}\frac{\gamma^4}{\rho}$$

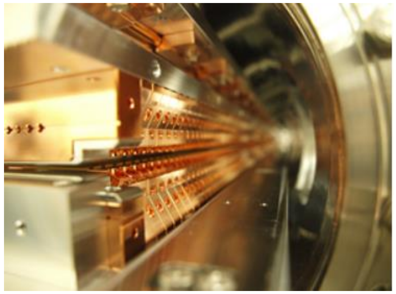
- 放射光の周波数

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c}{\rho}\gamma^3$$

アンジュレータ

- 偏向磁石を交互に並べる。周期数cm





http://www.spring8.or.jp

- 電子は磁石列の間を蛇行しつつ、放射光を発する。
- 蛇行と放出光の波長に関係がある。蛇行に関係した波長の光が強く放出される。

アンジュレータでの電子の運動

- ラグランジアン

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{s}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\dot{x}A_x$$

$$B_y = -B_0 \sin k_u s \qquad A_x = -\frac{B_0}{k_u}\cos k_u s$$

- x $\displaystyle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{s}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_x\right] = 0$

- S $\displaystyle \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{s}^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$ を使ってしまう。 $\displaystyle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{s}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{s}^2}{c^2}}}\right] = \frac{e}{c}\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial s}$

運動方程式の解

- x

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{s}^2}{c^2}}} = m\gamma\dot{x} = \frac{e}{c}\frac{B_0}{k_u}\cos k_u s \qquad \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{s}^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\dot{x} = \frac{cK}{\gamma}\cos k_u s \qquad K \equiv -\frac{e}{mc}\frac{B_0}{k_u}$$

- s

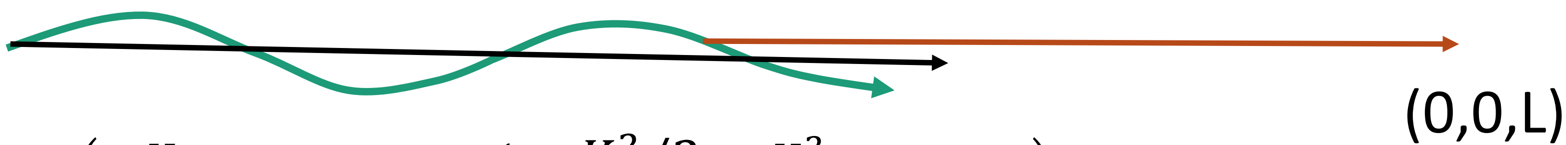
$$\dot{s} = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} = c\sqrt{1-\frac{1+K^2\cos^2 k_u s}{\gamma^2}}$$

$$= c\sqrt{1-\frac{1+K^2/2}{\gamma^2}-\frac{K^2}{2\gamma^2}\cos 2k_u s}$$

$$\approx c\left(1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u s\right)$$

場を形成する粒子の運動

- 粒子の運動をx’y’,s’,t’で表し、場の座標x,y,s,tを使い分ける。



$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{K}{\gamma}\cos k_u s', 0, 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u s' \right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left(\frac{K k_u c}{\gamma}\sin k_u s', 0, \frac{K^2 k_u c}{2\gamma^2}\sin 2k_u s' \right)$$

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{cK}{\gamma k_u}\sin k_u c t', 0, L - \left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}\right) c t' + \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c}\cos 2k_u c t' \right)$$

$$r = c(t - t')$$

下流で観測される電磁場(光)

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\kappa^3 R}\left[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}\,)-(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\,)\boldsymbol{\alpha}\right]$$

$$\mathbf{n} = (0,0,1)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{K}{\gamma}\cos k_u s'\,, 0{,}1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u s'\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial ct'} = \left(\frac{\beta K k_u}{\gamma}\sin k_u s'\,, 0, \frac{K^2 k_u}{2\gamma^2}\sin 2k_u s'\right)$$

$$\kappa \equiv 1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$$

$$= \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}+\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u s'$$

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \frac{K^2 k_u}{2\gamma^2}\sin 2k_u s'$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\kappa^3 R}\left[-\frac{2-K^2(1+\cos 2k_u s')}{4\gamma^2}\frac{K k_u}{\gamma}\sin k_u s'\right]\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$s' = ct'\left(1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right)$$

- $c\left(1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u s'\right)$

アンジュレータ放射の周波数成分

- 前方　　$\mathbf{n} = (0,0,1)$

  $\boldsymbol{E} \propto \sin k_u s' \sim \sin k_u ct'$

- $r = c(t - t')$よりtの関数として表す。

$$r = L - \left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right) ct' + \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \cos 2k_u ct'$$

$$ct = L + \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} ct' + \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \cos 2k_u ct'$$

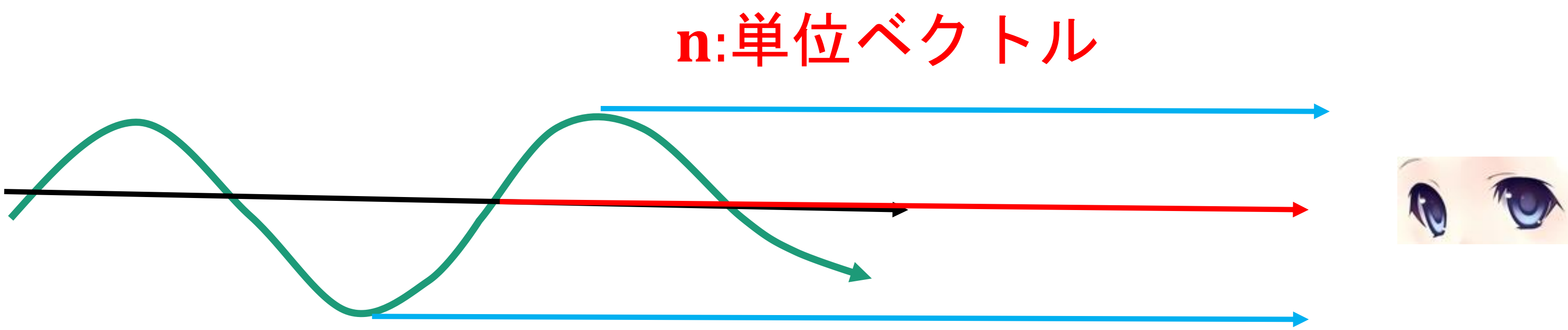
$$\boldsymbol{E} \sim \sin k_u ct' \sim \sin k_L ct$$

$$k_u = \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} k_L \qquad \lambda_L = \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \lambda_u$$

見た目の運動

- 十分下流で見ているとする。

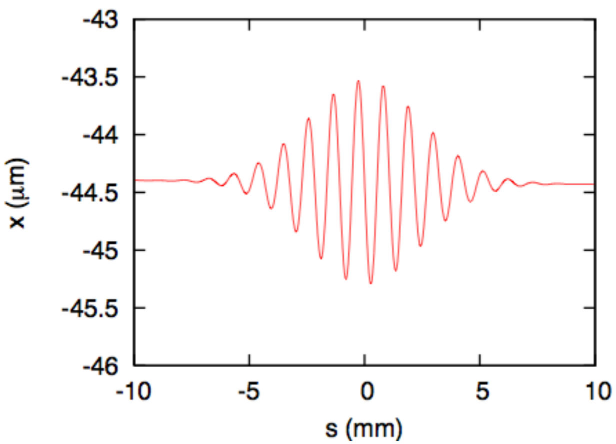
$$\kappa \equiv 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \ = \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2k_u s'$$



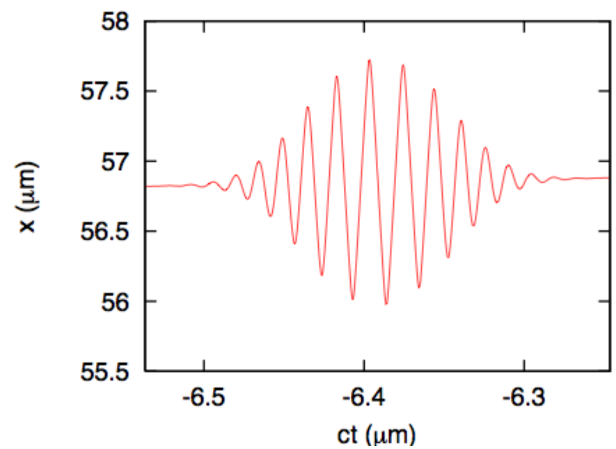
- $\mathbf{n} \parallel \boldsymbol{\beta}, \kappa = 1/2\gamma^2$ 最小値
- $\kappa = (1 + K^2)/2\gamma^2$ 最大値

アンジュレータ(レーザーとの衝突）での運動と生成電場

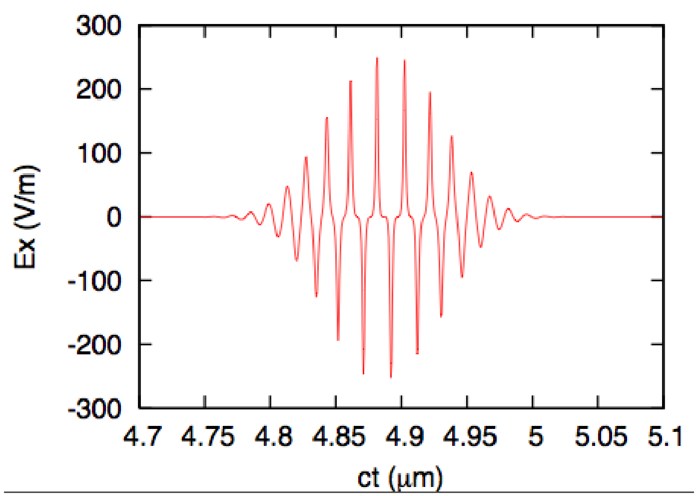
粒子の運動



見た目の運動



やや極大小部が尖っている



電場

はっきり尖っている

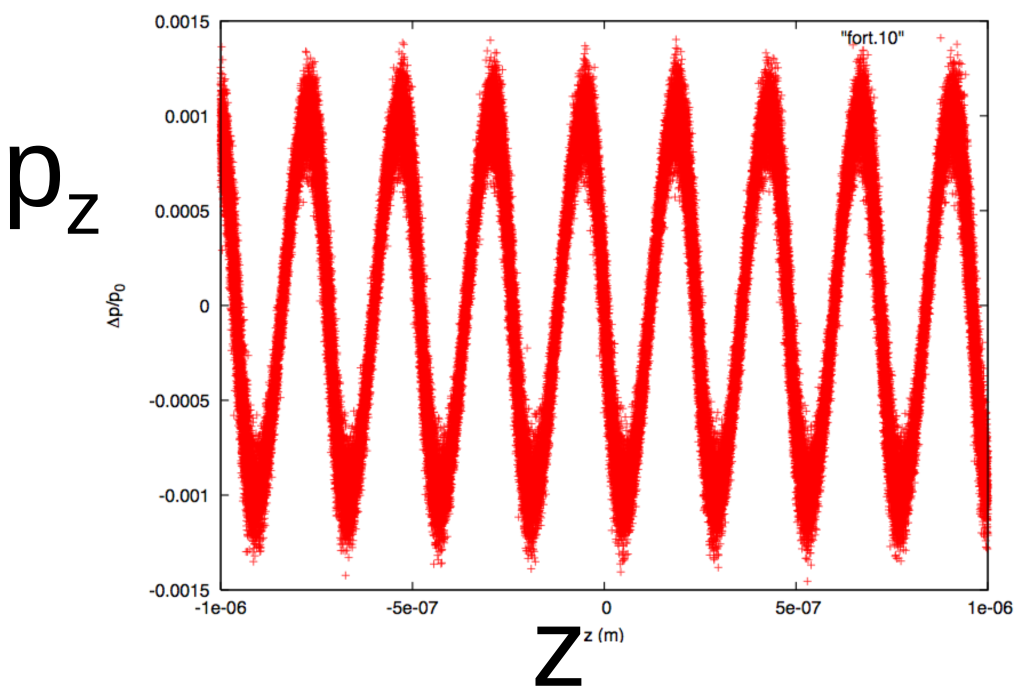
高周波成分を含む。

コヒーレンス

- 多数(N個)の電子を考える。
- 電場は重ね合わされる。
- 電磁波の位相はアンジュレータで曲がるタイミングで決まる、つまりバンチ内の電子の進行方向位置で決まる。
- 電子が等間隔で配置していたら、電磁場は出ない。
- 電子が1カ所に配置していたら、電磁場はN倍、パワーはN^2倍。
- ランダムに配置していたら、…

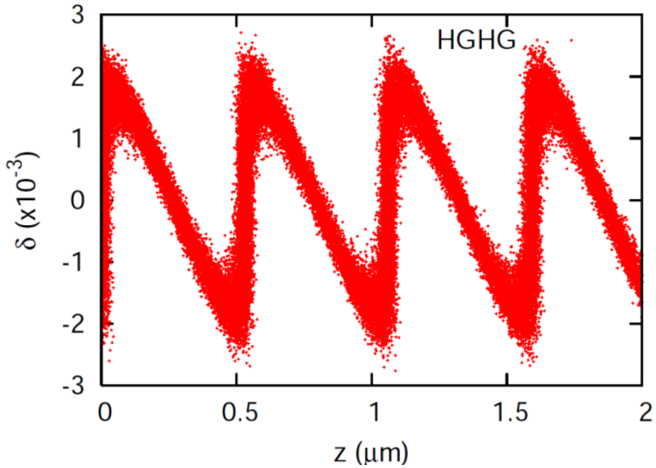
自由電子レーザー

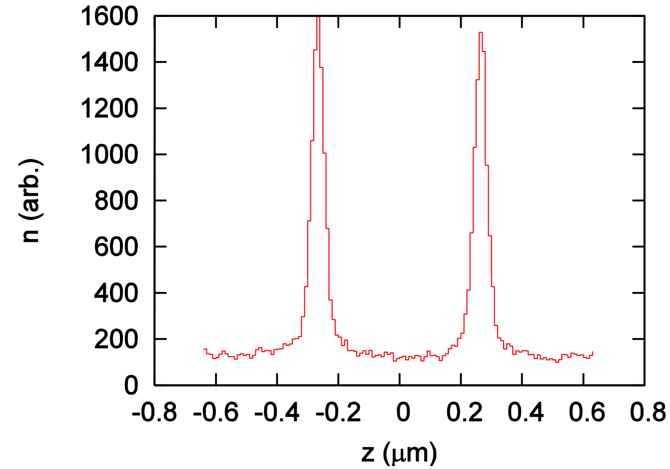
- 電子の放出する電磁波(光)あるいは外から与えられたレーザー場（$\lambda_L = \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\lambda_u$）により、アンジュレータ内で電子が$\lambda_L$の周期で加減速される。



バンチング

- $dz/ds=(1+K^2)/2\gamma^2$の効果によりsin分布が鋸型になり、電子密度がλ_Lの波長で高くなる。これをバンチングという。





- バンチングすることでλ_Lの波長の光がコヒーレントに放出される。
- この2つの過程が増幅されるのが自由電子レーザー。

アンジュレーター＋レーザー中の運動

- レーザー場の導入　$A_{L,x} = A\cos k_L(s - ct)$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{s}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\dot{x}(A_{u,x} + A_{L,x})$$

- x アンジュレータにより軌道が決まる。$A_{u,x} \gg A_{L,x}$

$$\dot{x} = -\frac{e}{m\gamma}A_x = -\frac{eB_0}{m\gamma\, k_u}\cos k_u s = -\frac{cK}{\gamma}\cos k_u s \qquad s \approx ct\left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}\right)$$

- Lは陽にtによる。その軌道運動でのレーザー場によるエネルギー損得がある。

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{e}{c}\dot{x}\frac{\partial A_{L,x}}{\partial t}$$

$$= \frac{ecK}{\gamma}Ak_L\cos k_u s\sin k_L(s - ct)$$

アンジュレータ軌道でのレーザー場によるエネルギー得失

- ビームのエネルギー変化

$$\frac{dE}{ds} = \frac{ecK}{\gamma} Ak_L \cos k_u s \sin k_L(s - ct)$$

$$\frac{dE}{ds} = \frac{ecK}{2\gamma} Ak_L [\sin((k_u + k_L)s - k_L ct) - \sin((k_u - k_L)s + k_L ct)]$$

遅い振動

- 1項目

$$(k_u + k_L)s - k_L ct = ct(k_u + k_L)\left(1 - \frac{1+\frac{K^2}{2}}{2\gamma^2}\right) - k_L ct$$

$$s \approx ct\left(1 - \frac{1+\frac{K^2}{2}}{2\gamma^2}\right)$$

- 外部電磁場のk_Lとアンジュレータ周期k_uの関係を以下のようにとる。

$$k_u = \frac{k_L}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$$

- 振動部分は遅くなる。

$$(k_u + k_L)s - k_L ct = ctk_L\left(1 + \frac{1+\frac{K^2}{2}}{2\gamma^2}\right)\left(1 - \frac{1+\frac{K^2}{2}}{2\gamma^2}\right) - k_L ct \approx 0$$

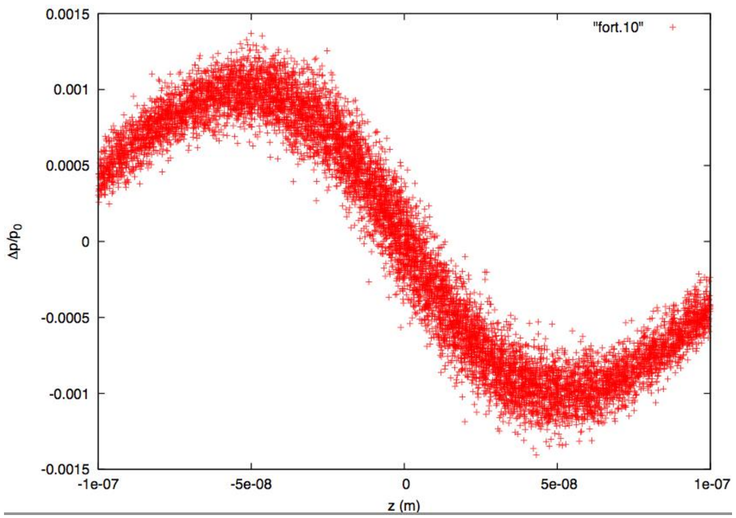
- 2項目は早く振動し平均的に効かない。

エネルギーロス=電磁場発生

- 位相を新たな変数とする

$$\psi \equiv (k_u + k_L)s - k_L ct$$

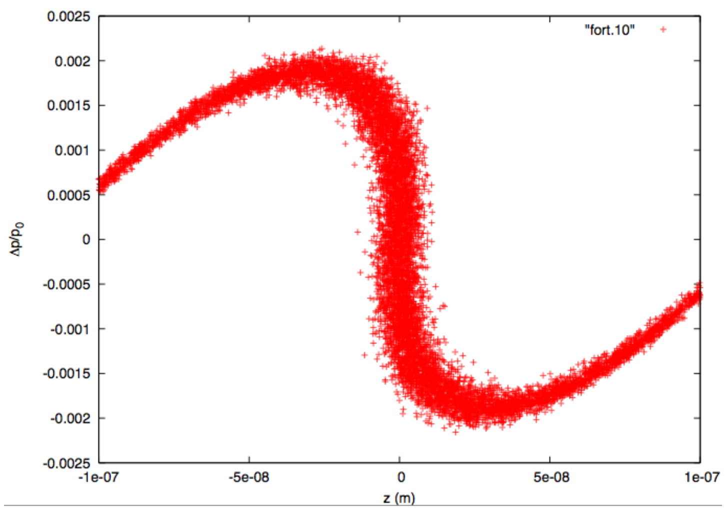
$$\frac{dE}{ds} = \frac{ecK}{2\gamma} A k_L \sin\psi$$



- 中心エネルギーを0より高めに設定すると、全体としてエネルギーロス。レーザー光発生。

自己発振型自由電子レーザー

- 最初電磁場がなくてもアンジュレータの初期光から徐々に下の分布のようになり、密度に濃淡が出てくると電磁波が強く発生する。
- X線レーザーが可能になった。



アンジュレータ＋レーザー電子運動

aw:K

aL:eA/mc

```
subroutine laser_undulator_1d(aw,kw,nperi,aL,kL,sigL,x,px,y,py,z,pz)
  use physconst
  use beam
  use simpar
  implicit none
  real*8 x(npmax),px(npmax),y(npmax),py(npmax),z(npmax),pz(npmax)
  real*8 aw,kw,aL,kL,sigL,K0,s_trv,kz,dz
  integer i,j,iper,nperi

!  Helical undulator model
  theta=aw/gam
  gz2i=1./gam**2+theta**2
  K0=0.5*theta*aL*kL/gam
  write(*,'(A,1P,E11.3)') 'Helical 1D undulator     K1 ',K0
  write(*,'(A)') 'lstep nperi  gamm lambdau    au'
  write(*,'(2I5,F8.1,2F8.3,1P,4E11.3)') lstep,nperi,gam,pi2/kw,aw
  write(*,'(A)') ' lambdaL     aL          sigL '
  write(*,'(1P,4E11.3)') pi2/kL,aL,sigL

  ds=pi2/kw/lstep

  s_trv=0.

  dz=0.
!  do i=1,ne
!     dz=dz+z(i)
!  enddo
!  dz=dz/ne

   do iper=1,nperi

!  LOOP in 1 wiggler period

    do j=1,lstep

      s_trv=s_trv+ds

      if(sigL.eq.0.) then
      do i=1,ne
        z(i)=z(i)+(gz2i*pz(i))*ds
        pz(i)=pz(i)+K0*sin(kL*z(i))*ds
      enddo
      else
      do i=1,ne
        z(i)=z(i)+(gz2i*pz(i))*ds
        kz=kL*(z(i)-dz)-kw*s_trv
        pz(i)=pz(i)+K0*sin(kL*(z(i)-dz))*ds*exp(-kz*kz/(2.*sigL*sigL))
      enddo
      endif
!     write(*,*) j
    enddo

  enddo

end subroutine laser_undulator_1d
```

X線自由電子レーザー

- SACLA(SPring8) 8GeV線形加速器
- LCLS(SLAC) 12GeV
- 10GeVビームを数cm周期のアンジュレータを通し1Å の単色光を発生
- 長いアンジュレータ(数10m)を通る間に、ビームが光の波長で変調されレーザー光を発生

レーザー電子ビーム相互作用

- レーザー場との正面衝突 $A_{u,x} = A\cos k_u(s+ct)$

-s方向に進む波

k_uで表す理由は下の式

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{s}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\dot{x}A_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{s}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_x\right] = 0$$

$$m\gamma\dot{x} = -\frac{e}{c}A\cos k_u(s+ct)$$

- s方向のビームの運動s~ct

$$m\gamma\dot{x} = -\frac{e}{c}A\cos 2k_u ct$$

- レーザー場によりと電子はアンジュレータ的振動、$2k_u$に注意

ビーム進行方向下流で観測される電磁場(光)

- レーザーと逆方向。通称逆コンプトン散乱と言われている。

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\kappa^3 R}\left[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})-(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}\right]$$

$$\mathbf{n}=(0,0,1)$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{K}{\gamma}\cos 2k_u s',0,1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{8\gamma^2}\cos 4k_u s'\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial ct'}=\left(\frac{\beta K k_u}{\gamma}\sin 2k_u s',0,\frac{K^2 k_u}{4\gamma^2}\sin 4k_u s'\right)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\kappa^3 R}\left[-\frac{2-K^2(1+\cos 4k_u s')}{8\gamma^2}\frac{K k_u}{\gamma}\sin 2k_u s'\right]\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$ct=L+\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}ct'$$

$$\boldsymbol{E}\propto\sin 2k_u s'\sim\sin 2k_u ct'\sim\sin k_L ct$$

$$k_u=\frac{1+K^2/2}{4\gamma^2}k_L \qquad \lambda_L=\frac{1+K^2/2}{4\gamma^2}\lambda_u$$

Thomson散乱

- 振動電磁場の中に置かれた荷電粒子が振動することで、電磁波を発生する。Thomson散乱という。
- 電子の運動

$$m\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}+\frac{m}{\tau_0}\boldsymbol{v}=e\boldsymbol{E}e^{-i\omega t+iks} \qquad \boldsymbol{\beta}=i\frac{e\boldsymbol{E}}{mc\omega}\frac{1}{1+i\omega\tau_0}e^{-i\omega t}$$

- 双極子放射

$$\boldsymbol{S}\approx\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{1}{r^2}\left|\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\boldsymbol{n}-\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'}\right|^2\boldsymbol{n}$$

- レーザービーム相互作用による放射はThomson散乱と同じ原理

レーザープラズマ加速